

# 基于混合模型的炮位外推算法研究

毛 洋 方逸远 周敬烈

(南京电子技术研究所 南京 210000)

**摘要:** 传统一阶扩展卡尔曼滤波算法广泛应用于各类炮丸的外推滤波,需要连续占用雷达时间资源。一种基于最小二乘滤波和一阶扩展卡尔曼滤波的混合模型扩展卡尔曼滤波算法针对迫击炮炮丸初速小、射角大等运动特性,采用灵活的分段采样,实现了对迫击炮炮丸弹道的良好外推。仿真结果说明该算法在炮丸射角和射角不同的情况下与传统一阶扩展卡尔曼滤波精度相当,在炮丸射角较大时,能获得优于传统一阶扩展卡尔曼滤波的精度,且占用雷达资源少、实时性良好,适于工程实用。

**关键词:** 弹道模型;炮位外推算法;混合模型;分段采样;扩展卡尔曼滤波

**中图分类号:** TN953    **文献标识码:** A    **国家标准学科分类代码:** 510.70

## Research of emplacements extrapolation method based on the hybrid model

Mao Yang Fang Yiyuan Zhou Jinglie

(Nanjing Research Institute of Electronics Technology, Nanjing 210000, China)

**Abstract:** Traditional first-order extended Kalman filter algorithm is widely used in various types of shells extrapolation filter, and it requires continuous occupancy of radar's time resource. The hybrid model Kalman Filter algorithm which is based on the Least Squares Filter and the EKF contrapose the mortar's movement characteristics of the small initial velocity and big launch angle, using flexible segmented sampling, realize good extrapolation of mortar's movement. The simulation show that, the algorithm has the similar accuracy to the EKF in different launch angle and azimuth and even better in high launch angle, takes less resources, has good real-time performance, and it is suitable for practical engineering.

**Keywords:** trajectory model; extrapolation emplacement; hybrid model; segmented sampling; extended Kalman filter

## 1 引言

20世纪80年代以来,随着美军TPQ-37雷达,俄罗斯“动物园-1”雷达,英、法、德等国“眼镜蛇”(Cobra)雷达及瑞典“阿瑟”(Arthur)火炮定位雷达<sup>[1]</sup>的研制成功,炮位侦查雷达的发展进入了一个新阶段。以卡尔曼滤波<sup>[2]</sup>理论为基础的弹道滤波算法也取得了较大的发展。

传统的炮位外推算法<sup>[3]</sup>主要是在测量坐标系下对点迹采用扩展卡尔曼滤波,再通过龙格库塔法外推得到炮弹目标的弹道。然而由于传统的常增益滤波虽然运算量小、但精度较差,传统卡尔曼滤波器运算量大、实时性不好且需要连续占用雷达时间资源的问题,近年来一些如带有噪声估计器的拟线性最优平滑滤波算法<sup>[4]</sup>、改进式粒子滤波算法<sup>[5]</sup>、非高斯噪声滤波技术<sup>[6-7]</sup>等方法的提出有效促进了滤波算法的发展。本文充分利用传统滤波方法的优点,采用灵活的分组采样,提出一种基于最小二乘滤波和衰减记忆

扩展卡尔曼滤波的混合模型卡尔曼滤波算法,以期能够在工程实用中满足雷达系统对灵活的资源调度能力与良好的滤波精度的双重需求。

## 2 算法描述

### 2.1 迫击炮运动特性

迫击炮自问世以来就一直支援和步兵作战的一种有效的压制兵器,是步兵极为重要的常规武器,它具有如下特点:

1)膛压低,初速小,一般200~400 m/s。弹道系数对全弹道的影响在初始扰动段最大,所以迫击炮弹道受弹道系数的影响较小,在弹道计算时,可以忽略弹道系数的变化对弹道的影响。

2)射角高,弹道弯曲,射角基本都在45°以上,最大可达85°。

3) 弹丸飞行时间长。

4) 采用尾翼稳定,可不考虑炮丸自转,利于雷达实时数据处理。

## 2.2 弹道模型

运用弹道方程,可表示迫击炮状态向量及状态向量对时间的导数为:

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ v_x \\ v_y \\ v_z \\ C \end{bmatrix}, \quad \dot{\mathbf{X}} = f(\mathbf{X}) = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \\ -C\rho(y)G(v) \cdot v_x \\ -C\rho(y)G(v) \cdot v_y - g_0 \\ -C\rho(y)G(v) \cdot v_z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1)$$

式中:  $C$  为弹道系数;  $\rho(y)$  为空气密度函数,表达式为:

$$\rho(y) = \frac{13.6h(y)}{R_1\tau(y)} \quad (2)$$

$g_0$  为发射点处的重力加速度。表达式为:

$$g_0 = 9.80665 \times [1 - 0.0026\cos(2L)] + R\Omega^2\cos^2L \quad (3)$$

$L$  为发射点地球纬度,  $R$  为地球半径,  $R = 6356766$  m,  $\Omega$  为地球自转角速度,  $\Omega = 7.29 \times 10^{-5}$  rad/s.  $G(v)$  为阻力函数,表达式为:

$$G(v) = \frac{\pi}{8} \times 10^{-3} \cdot C_D^*(Ma) \cdot v \quad (4)$$

对  $\mathbf{X}(t + \Delta t)$  泰勒展开,取至一阶项,则得离散化的状态向量递推式为

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{X}(k) + \bar{\mathbf{X}}(k) \cdot T \quad (5)$$

式中:  $T$  为跟踪时间间隔。

## 2.3 滤波方法

传统的炮位侦察雷达一般是通过选取炮弹上升阶段的连续采样点,对其滤波,得到包含其径向速度的外推点,再用龙格库塔方法进行炮位外推,得到炮位点。传统卡尔曼滤波算法在滤波时需要连续时间采样,连续占用雷达的系统时间资源。而混合模型滤波算法采用灵活的分段采点,将不同时间段的  $n$  个连续采样点分为一组,对每个分组进行最小二乘滤波<sup>[8]</sup>得到一个相对高精度的点,不需要连续占用雷达时间资源:

设对某一段弹道轨迹  $y(t)$  分为  $n$  个一组,得到一组测量值  $\{\tilde{y}_i\}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。其中  $e_i$  是期望为 0、方差为  $\sigma^2$  的随机误差。

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \vdots \\ \tilde{y}_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{e} = \begin{bmatrix} e_0 \\ e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\Theta} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1^q & t_2^q & \cdots & t_n^q \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (7)$$

量测和状态向量可表示为:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{T}^T \mathbf{a} + \mathbf{e}, \quad \mathbf{Y} = \mathbf{T}^T \mathbf{a} \quad (8)$$

最小二乘方估计式可以写成

$$\varphi(\hat{\mathbf{Y}}, \mathbf{a}) = (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{T}^T \mathbf{a})' (\hat{\mathbf{Y}} - \mathbf{T}^T \mathbf{a}) \rightarrow \text{最小} \quad (9)$$

去估计  $y(t)$  在  $t_i$  时刻的值  $y(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ 。这样求得的估计值记作  $\hat{y}(t_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , 即  $y(t_i)$  的最小二乘方估计点。得到参数矩阵的最佳估计和其协方差矩阵分别为:

$$\hat{\mathbf{a}} = (\mathbf{T}\mathbf{T}^T)^{-1} \mathbf{T}\mathbf{Y}, \quad \sum_{\sigma^2} = \sigma^2 (\mathbf{T}\mathbf{T}^T)^{-1} \quad (10)$$

则估计值  $\hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{T}^T \hat{\mathbf{a}}$  就是我们得到的最小二乘滤波外推点。

然后再用弹道模型的衰减记忆一阶扩展卡尔曼滤波算法滤波得到高精度的外推点:

假定  $k$  时刻的估计为  $\hat{\mathbf{X}}(k|k)$ , 状态方程在  $\hat{\mathbf{X}}(k|k)$  附近进行泰勒一阶展开

$$\mathbf{X}(k+1) = \mathbf{F}(k, \hat{\mathbf{X}}(k|k)) + \mathbf{F}_x(k) [\mathbf{X}(k) - \hat{\mathbf{X}}(k|k)] + \text{高阶项} + \Phi(k) \quad (11)$$

式中:  $\mathbf{F}_x(k)$  是雅克比矩阵。则状态的一步预测为:

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1|k) = \mathbf{F}(k, \hat{\mathbf{X}}(k|k)) \quad (12)$$

采用衰减记忆<sup>[9]</sup>,  $T$  为跟踪间隔,  $\tau$  为衰减因子, 一般取 3。则协方差一步预测为:

$$\mathbf{P}(k+1|k) = e^{T/\tau} [\mathbf{F}_x(k) \mathbf{P}(k|k) \mathbf{F}_x'(k) + \mathbf{Q}(k)] \quad (13)$$

同理将量测用泰勒一阶展开,量测预测值为:

$$\hat{\mathbf{Z}}(k+1|k) = \mathbf{H}(k+1, \hat{\mathbf{X}}(k+1|k)) \quad (14)$$

其相伴的协方差为:

$$\mathbf{S}(k+1) = \mathbf{H}_x(k+1) \mathbf{P}(k+1|k) \mathbf{H}_x'(k+1) + \mathbf{R}(k+1) \quad (15)$$

滤波增益为:

$$\mathbf{K}(k+1) = \mathbf{P}(k+1|k) \mathbf{H}_x'(k+1) \mathbf{S}^{-1}(k+1) \quad (16)$$

状态更新方程为:

$$\hat{\mathbf{X}}(k+1|k+1) = \hat{\mathbf{X}}(k+1|k) + \mathbf{K}(k+1) [\mathbf{Z}(k+1) - \hat{\mathbf{Z}}(k+1|k)] \quad (17)$$

协方差更新方程为:

$$\mathbf{P}(k+1|k+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(k+1) \mathbf{H}_x(k+1)] \mathbf{P}(k+1|k) [\mathbf{I} + \mathbf{K}(k+1) \mathbf{H}_x(k+1)]' - \mathbf{K}(k+1) \mathbf{R}(k+1) \mathbf{K}'(k+1) \quad (18)$$

滤波后得到位置、速度状态量和弹道参数,再用四阶龙格库塔法<sup>[10-11]</sup>外推敌方炮位:

$$\begin{cases} \mathbf{X}(k+1) = \mathbf{X}(k) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(\mathbf{X}(k)) \cdot T \\ k_2 = f(\mathbf{X}(k) + \frac{k_1}{2}) \cdot T \\ k_3 = f(\mathbf{X}(k) + \frac{k_2}{2}) \cdot T \\ k_4 = f(\mathbf{X}(k) + \frac{k_3}{2}) \cdot T \end{cases} \quad (19)$$

式中： $f(\mathbf{X})$  如式(1)所示， $T$  为采样时间间隔。

### 3 算法仿真

#### 3.1 混合模型卡尔曼滤波算法仿真

生成一个迫击炮弹道，噪声参数： $\sigma_r = 30\text{m}$ ， $\sigma_a = 0.13^\circ\text{m}$ ， $\sigma_e = 0.15^\circ$ ；炮弹弹道系数  $C=0.9$ ，射向与正北夹角  $60^\circ$ ，射角  $61.4^\circ$ ，初速度  $250\text{ m/s}$ ，发射点  $(117.88^\circ\text{E}, 32.04^\circ\text{N})$ ；雷达  $(118^\circ\text{E}, 32^\circ\text{N})$  参数：扫描时间间隔  $0.1\text{ s}$ ，跟踪时间间隔  $0.5\text{ s}$ ，距离波门  $500\text{ m}$ ，波束宽度  $2.2^\circ$ ，跟踪起始仰角  $1^\circ$ ，增益参数  $\alpha=0.7$ ，衰减因子  $\tau=3$ ；敌方真实炮位点  $X=[x, y, z]^T=[4441.82, -11.62, -11334.4]$ 。

取上升阶段的三组共 30 个采样点，首尾两组每组 12

点，中间组 6 个点，每组之间间隔  $2\text{ s}$ ，采样点中间疏两边密的特点能在满足精度的条件下降低滤波时间，用最小二乘滤波分别对三组采样点进行估计，得到较高精度的滤波点，第一组的滤波值为  $\tilde{\mathbf{X}}_1 = [12069.45, -1.18534, 0.025966]$ ，第二组滤波值  $\tilde{\mathbf{X}}_2 = [11929.43, -1.16707, 0.062427]$ ，第三组滤波值  $\tilde{\mathbf{X}}_3 = [11813.99, -1.15394, 0.088336]$ ，将这三点进行衰减记忆一阶扩展卡尔曼滤波后得到滤波点为  $\mathbf{X} = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}] = [11811.52, 1.153159, 0.08992, -58.06, 0.007590, 0.01335]$  经过弹道外推过程之后，混合模型卡尔曼滤波得到的外推炮位点的坐标为  $X=[x, y, z]^T=[4473.68, 8.91, -11361.27]$ ，耗时  $0.001802\text{ s}$ 。采用混合模型卡尔曼滤波算法外推得到的炮位距离误差为  $41.67\text{ m}$ ，外推精度为  $0.342\%$ 。

在弹道上升段取 25 个采样点，对这些采样点进行一阶扩展卡尔曼滤波，得到滤波点为  $X = [x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}] = [11830.30, -1.155935, 0.084889, -58.07976, 0.006950, 0.013027]$ ，耗时  $0.00242\text{ s}$ 。经过弹道外推，传统一阶卡尔曼滤波得到外推炮位点坐标为  $X=[x, y, z]^T=[4471.20, 18.44, -11357.78]$ ，其距离误差为  $37.54\text{ m}$ ，外推精度为  $0.308\%$ 。外推轨迹图如下：

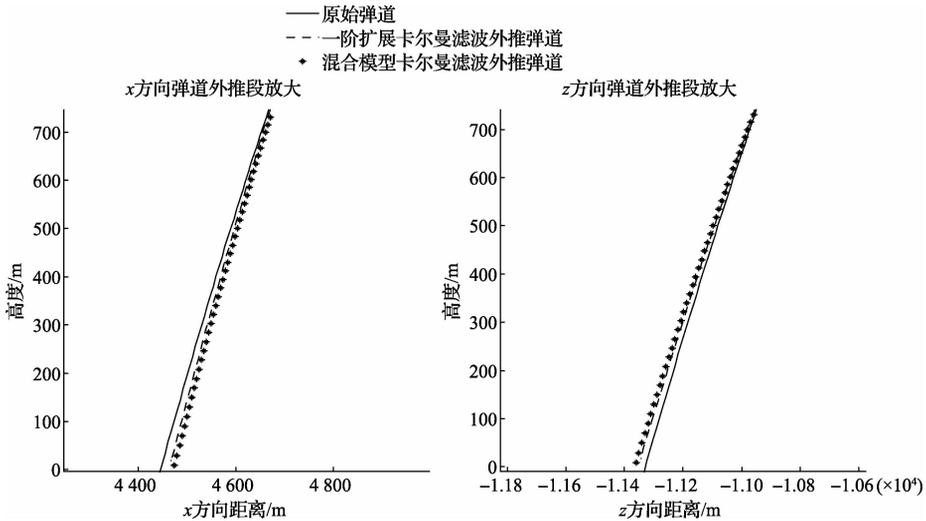


图 1 混和模型卡尔曼滤波与扩展卡尔曼滤波外推弹道

比较两种滤波方法的外推弹道：混合模型卡尔曼滤波相较于传统的扩展卡尔曼滤波精度相当，耗时更短。

#### 3.2 在不同场景下的仿真

##### 3.2.1 改变炮丸发射方向

采用与 3.1 相同的弹道和雷达参数，调整发射方向

与正北的夹角为  $75^\circ$  和  $120^\circ$ ，仿真比较混合模型卡尔曼滤波与传统扩展卡尔曼滤波的滤波效果，外推轨迹图如下：

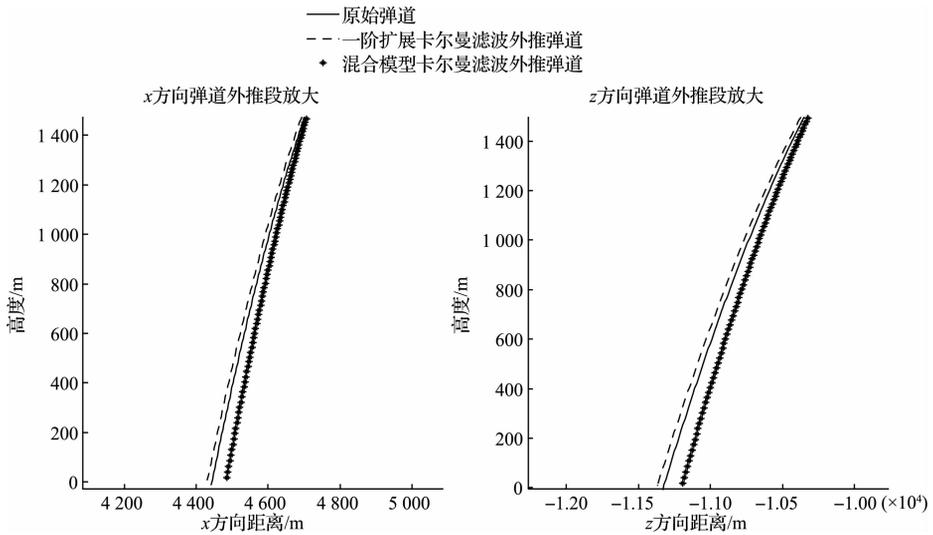


图 2 炮丸发射方向与正北夹角 75°

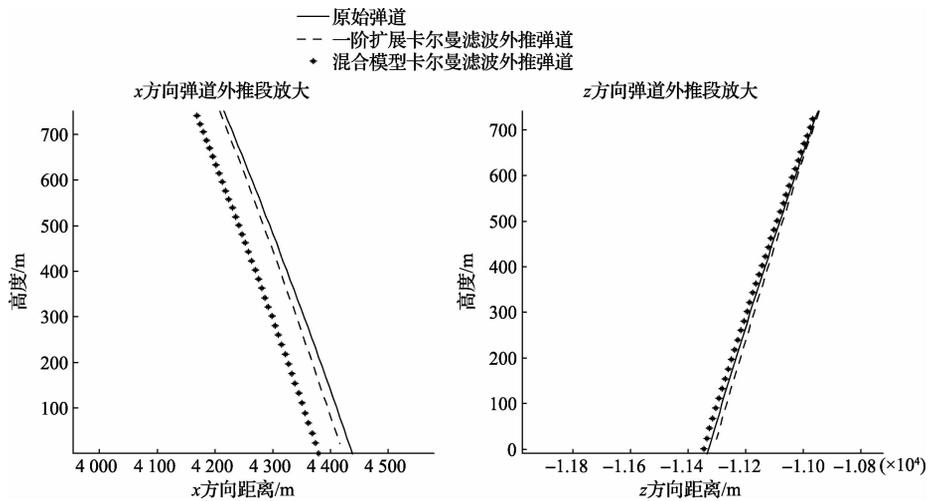


图 3 炮丸发射方向与正北夹角 120°

由表 1 可知,随着发射方向与雷达波束夹角的增加,

表 1 改变炮丸发射方向对于滤波精度的影响

射向角 (°)	混合模型卡尔曼滤波		扩展卡尔曼滤波	
	距离误差/m	外推精度	距离误差/m	外推精度
60	41.67	0.342%	37.54	0.308%
75	64.43	0.526%	53.82	0.440%
120	66.56	0.546%	64.77	0.532%

外推的敌方炮位误差也会随之增加,但是基本保持在可以接受的范围内。混合模型卡尔曼滤波对发射方向的变化更为敏感,调整好雷达与敌方炮位的距离和波束与弹丸发射夹角,有助于提高滤波精度。

### 3.2.2 改变炮丸射角

采用与 3.1 节相同的弹道和雷达参数,调整炮丸射角为 70°和 75°,仿真比较混合模型卡尔曼滤波与传统扩展卡尔曼滤波的滤波效果,外推轨迹图如下:

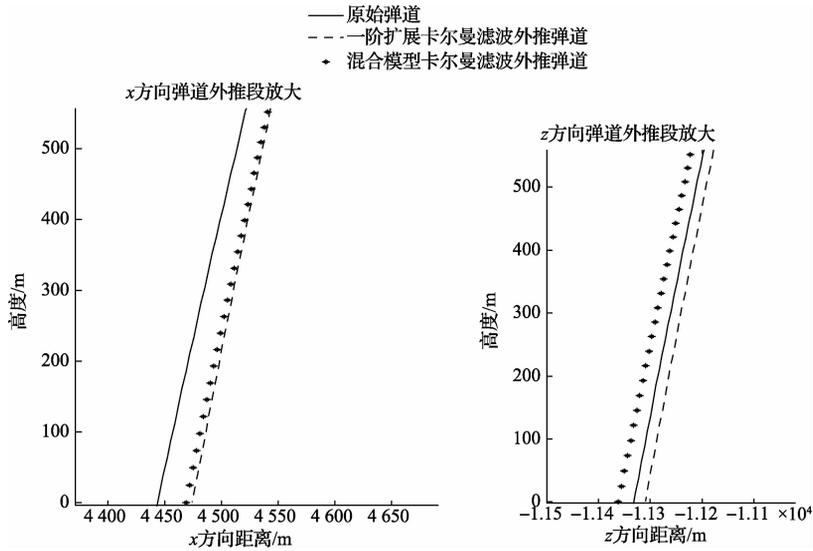


图 4 炮丸射角 70°

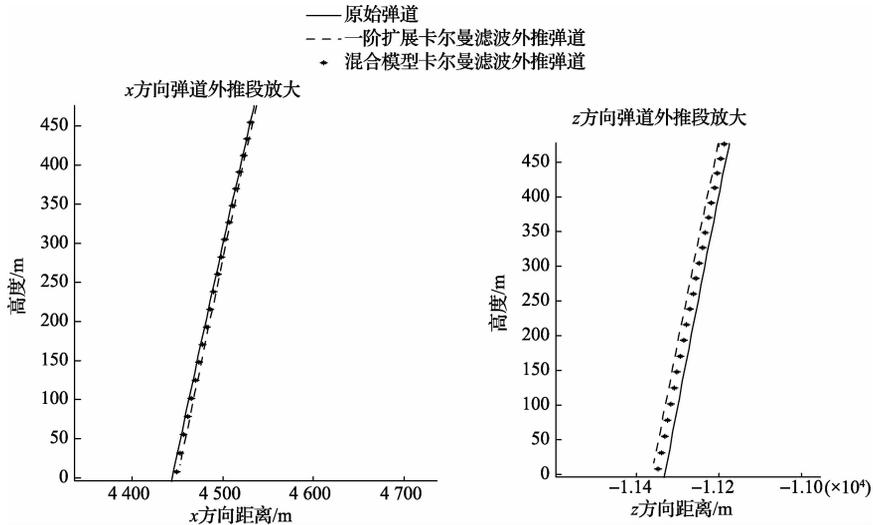


图 5 炮丸射角 75°

由表 2 可知,随着炮丸发射角增大,混合模型卡尔曼滤波和传统扩展卡尔曼滤波的滤波精度都相对越好,而混和模型卡尔曼滤波能获得优于传统扩展卡尔曼滤波的精度,对于高射角炮丸,混合模型卡尔曼滤波具有很好的效果。

表 2 改变炮丸射角对于滤波精度的影响

射向角 (°)	混合模型卡尔曼滤波		扩展卡尔曼滤波	
	距离误差/m	外推精度	距离误差/m	外推精度
61.4	41.67	0.342%	37.54	0.308%
70	39.39	0.323%	41.14	0.338%
75	13.88	0.114%	24.86	0.204%

## 4 结 论

考虑到迫击炮丸射角高、初速小、弹道受弹道系数的影响小的特点,在弹道计算时,可以忽略弹道系数的变化对弹道的影响。另外迫击炮弹采用尾翼稳定,可以不考虑弹丸自转,此时其弹道近似于抛物线,混合模型卡尔曼滤波通过合理灵活的分段采点,拟合得到高精度点,这可以减少卡尔曼滤波的点数且不要求连续占用雷达时间资源。

仿真结果表明:对于高射角炮丸的弹道外推,混合模型卡尔曼滤波算法在炮丸射向角和射角不同的情况下均具有与传统扩展卡尔曼滤波相当的精度,其中在炮丸射角

(下转第 45 页)