

## 稀疏频谱感知 BigBand 算法阈值选择研究\*

樊楷<sup>1,2</sup> 金彦亮<sup>1</sup> 熊勇<sup>2</sup>

(1. 上海大学通信与信息工程学院 上海 200072)

(2. 中国科学院上海微系统与信息技术研究所 上海 200050)

**摘要:** 根据奈奎斯特采样定理,实时感知 GHz 数量级宽的频率,需要 GHz 以上的高速 AD 转换器。由于价格、功耗的限制,实际应用中较难实现。基于稀疏频谱感知的 BigBand 算法,针对环境中信号稀疏的情况下,通过多个 50 MHz 的 AD 转换器可以还原出 0.9 GHz 宽的频谱。本文针对稀疏频谱感知的 BigBand 算法中的阈值进行研究,通过对噪声的参数的统计特征进行理论分析,提出一种基于最先检测信号强度的概率密度的阈值设定方法,为稀疏频谱感知 BigBand 算法的实际应用提供了技术支撑。

**关键词:** 稀疏频谱感知; BigBand 算法; 稀疏傅里叶变换;

**中图分类号:** TN911.6      **文献标识码:** A      **国家标准学科分类代码:** 510.2010

## Research on the threshold selection of BigBand sparse spectrum sensing algorithm

Fan Kai<sup>1,2</sup> Jin Yanliang<sup>1</sup> Xiong Yong<sup>2</sup>

(1. School of Communication and Information Engineering, Shanghai University, Shanghai 200072, China;

2. Shanghai Institute of Microsystem and Information Technology in Chinese Academy of Science, Shanghai 200050, China)

**Abstract:** According to the Nyquist sampling theory, it is necessary to have ADCs of capability of GHz sampling speed to sense the spectrum of GHz bandwidth in real time. But this is not possible with the limitations of budget and energy consumption. The BigBand sparse spectrum sensing algorithm, targeting to the sparsity of signals, is capable of sensing 0.9 GHz wide spectrum using several 50 MHz low speed ADCs. In this paper, the threshold for eliminating out the noise is researched, by using the statistical parameters of noise. A threshold calculating method is proposed, supporting the implements of BigBand algorithm in practices.

**Keywords:** sparse spectrum sensing; BigBand algorithm; sparse Fourier transform

## 1 引言

由于无线通信技术的限制,随着无线通信设备的普及,频带资源日益枯竭。在这过程中,很多机构如 FCC<sup>[1]</sup> 已经考虑释放一些频段,让用户共享。之所以能这么做,很大程度上是因为在实际使用中,频谱的利用是稀疏的<sup>[2]</sup>。

为利用稀疏的频谱资源,需要先对足够宽的频谱进行感知,以发现空余的频谱。由于目前众多通信设备在不同的频谱上使用,整体被使用的带宽较宽,已经超过 1 GHz 带宽。根据奈奎斯特定理,完全恢复出 1 GHz 带宽的信号,至少需要使用一个采样频率在 2 GHz 的 AD,然而在具体应用时,由于价格和功耗的限制,难以实现。奈奎斯特定理是针对完全恢复出整个频段上的信号,考虑到信号在频

段上的稀疏性,可以研究只恢复能量大值信号的方法,从而突破奈奎斯特定理的限制。为此,针对稀疏信号的情况,有研究人员提出了大量的算法,如: Mishali 等人<sup>[3]</sup> 利用了信号的稀疏性,通过降采样原理设计了一个宽频信号解调器。实现了在 6% 稀疏度下,采用 280 MHz 的采样率便可还原出 2 GHz 宽的频谱;张京超等人使用信号带宽 4 倍的采样率实现了还原出原始信号<sup>[4]</sup>; Tropp 等人<sup>[5]</sup> 设计了一种算法,使得只需要每秒的采样率满足特定条件,就可以还原信号;秦乙等人<sup>[6]</sup> 使用压缩感知技术,在调频信号中实现了低于奈奎斯特采样速率的还原算法。付宁等人<sup>[7]</sup> 采用快速傅里叶变换(FFT)和曲线拟合等技术,利用 100 MHz 的采样率,实现信号 100~150 MHz 带宽内单音周期信号的幅频测量。庄晓燕等人<sup>[8]</sup> 提出了基于压缩感知理论的随机等效

收稿日期:2016-11

\* 基金项目:上海市科技创新行动计划(16DZ1200900)资助项目

采样信号重构算法,在频域对随机等效采样系统进行行为建模,在保证信号重构精度情况下能够有效减少采样次数。史洪印等人<sup>[9]</sup>提出了一种抑制欺骗式干扰并实现目标高分辨重建的雷达信号检测算法,实现了在远低于奈奎斯特采样率下的目标高分辨成像。龚辉<sup>[10]</sup>该文提出了一种基于阶段正交匹配追踪压缩感知于 MMSE 的联合压缩感知超宽带混合信道估计算法,实现了低奈奎斯特采样率的信道估计。

以上这些算法,都成功的实现了低于奈奎斯特采样率的信号还原。但是这些算法不是计算量过大,就是需要对检测信号有一定的先验信息,使得算法在实际应用中,特别是在实时频谱感知中,难以推广。

2014 年, Hassanieh 等人<sup>[11]</sup>在稀疏傅里叶变换中信号降采样还原算法<sup>[12]</sup>的基础上,提出了一种 BigBand 算法,针对稀疏信号能快速感知频谱,在一定误差范围内,只需 3 个 50 MHz 的 ADC 就可以实时扫描 0.9 GHz 宽的频谱。同年, Lu 等人<sup>[13]</sup>将此技术应用到超宽带感知算法中,并着重讨论了稀疏度对算法性能的影响。2016 年, Ma 等人<sup>[14]</sup>将此算法应用到认知无线电中,并极大提高了计算速度。然而算法中的大量参数由经验获得,其中阈值大小的选取对算法结果的影响最大。目前还没有发现有文献对算法中阈值选取进行研究,都是根据经验选取。本文通过对噪声参数的统计特征进行理论分析,提出一种基于最先检测信号强度的概率密度的阈值设定方法,为 BigBand 算法在实际中使用提供技术支撑。

## 2 BigBand 算法

BigBand 算法是一个建立在稀疏傅里叶变换算法基础上,能以低于奈奎斯特频率采样,并最终能恢复出原始信号频域的算法。通过牺牲一定的精度换取速度上的极大提升。BigBand 算法可以分为分框、频率估计和冲突解决等 3 个步骤。

### 2.1 分框

根据离散傅里叶变换理论,信号在时域上的降采样会导致频域上混叠。如果一个时域信号表示  $x$ , 带宽是  $BW$ ,  $B$  是降采样速率,  $p = \frac{BW}{B}$  是降采样系数,  $b$  是  $x$  的降采样  $b_i = x_{ip}$ , 则:

$$\hat{b}_i = \sum_{m=0}^{p-1} \hat{x}_{i+m(\frac{p}{p})} \quad (1)$$

这表明:在对降采样的信号进行 FFT 后,带宽是频带会被到宽的频带上,即一个框中。原信号位置上的值,会被映射到框中下标是  $i = f \bmod \frac{BW}{p}$ 。框中每一个点上的值都是  $p$  个信号源频带的值的相加。如图 1 所示。假定接收信号在频域上是稀疏的,那么框中绝大部分点的值应当接近 0,或者是相对于信号大值来说较小。

然后根据经验设定一个阈值,将框中低于此值的点均

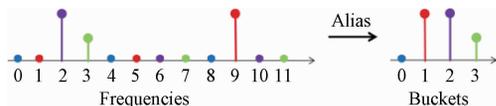


图 1 分框示意图<sup>[11]</sup>

设置为 0。因为信号的强度相对是很大的,由此将噪声滤去。

在滤去噪声的情况下,计算到的混叠的频谱只含有有限个大值。在信号的接收端,除了正常接收到的信号外,还需要另外两路接收信号,分别比常接收到的信号延迟  $\tau_1$  和  $\tau_2$ 。

### 2.2 估值

根据基本的离散傅里叶变换知识,如果:

$$\hat{b}_i = \hat{x}_f \quad (2)$$

则:

$$\hat{b}_i^{(\tau)} = \hat{x}_f \exp(2\pi f \tau) \quad (3)$$

式中:  $\hat{b}_i$  代表时域信号  $b$  在 FFT 变换后第  $i$  点位置上的值,  $\tau$  代表延时。

如果框中某点仅有一个频率点大值,那么便可根据相位变化还原出原频率值。在有噪声的情况下,恢复出来的频率值不会和原频率点相等。但是由于框中每一个点中包含的值,均是由有限个且位置已知的点构成。那么找到域恢复出来的频率值最接近的原频谱上的频率值便可。

此外,如果框中两次不同延时导致的点的幅度相差很多,那么就认为其包含两个不同频率的大值。要恢复出来就需要下一步:冲突解决。

### 2.3 冲突解决

如果判断出框中某点存在两个大值,就需要使用解决冲突算法。由于框中某点的值是由两个不同频率的信号引起的,那么在对信号分别取两次延时的情况下,3 次降采样得到的框中点,符合下列等式:

$$\hat{b}_i = \hat{x}_f + \hat{x}_{f'} \quad (4)$$

$$\hat{b}_i^{(\tau_1)} = \hat{x}_f \exp(2\pi f \tau_1) + \hat{x}_{f'} \exp(2\pi f' \tau_1) \quad (5)$$

$$\hat{b}_i^{(\tau_2)} = \hat{x}_f \exp(2\pi f \tau_2) + \hat{x}_{f'} \exp(2\pi f' \tau_2) \quad (6)$$

如果已知  $f$  和  $f'$ , 那么上式就变成一个超定系统。由于原信号  $f$  位置上的频率值,会被映射到框中  $i = f \bmod \frac{BW}{p}$  的位置上,所以构成框中大值点的组合是有限的。将每一个可能的  $f$  和  $f'$  代入方程,求得最小方差的那一组  $\hat{x}_f$  和  $\hat{x}_{f'}$ , 这样就解决了碰撞问题。

## 3 噪声阈值分析

通过在第 2 节中分析得知,在接收到基带信号后,需要对接收信号进行降采样,之后再行 FFT 变换。由于信号在频域上是稀疏的,在没有噪声的情况下,得到的结果将是

框中仅存在少数几个大值,其余点都是 0。

在实际有噪声的情况下,对降采样之后的信号进行 FFT 变换之后,得到的框中所有点的上都是有值的。有信号映射过去的点中的值,也会因为噪声信号而改变。所以,3 次降采样之后的得到框中每一点的值都是不同的。它们在模上的大小以及相位均会发生改变。

为了要能够准确的还原出信号频谱,首先要将噪声滤除,只留下有信号的部分。因为考虑的是信号大值。即接收到的信号在频域上的模,相对于噪是大很多。所以只需要在框中设立一个阈值。框中某点的模小于这个阈值的时,便认为该点无信号。一个合理的阈值刚刚好大于绝大部分噪声的模。这样就能将绝大部分的噪声滤除,而且不影响到信号

大多情况下阈值的设定是简单的,如图 2 所示。可以清晰地看到,在降采样之后信号大值相对于噪声是很明显的。此时阈值只需要取一个较高的数值,比如 500 000 便可将噪声全部滤去,信号全部保留,从而还原出元频谱。如图 3 所示的情况,阈值的设定就没那么明显。同时应该注意到信号大值的模依然比噪声的模大。

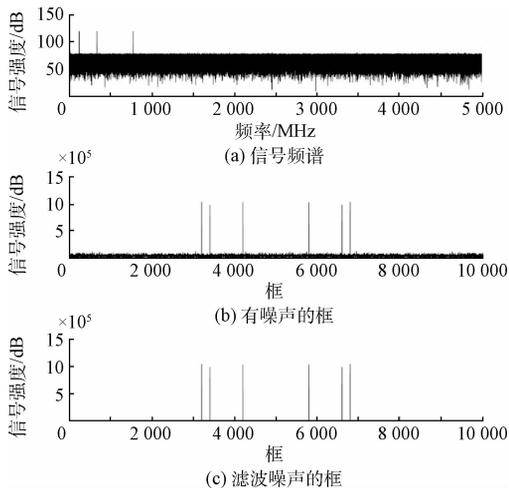


图 2 10 dB 噪声正弦波信号频谱图和降采样及滤除噪声

如图 3 所示的情况,一个合适的阈值很难通过经验来确定。阈值的设定应该遵行这样一个标准:尽可能的小,这样才不会漏检信号。但是也要足够的大,大到能将几乎全部大噪声滤去。而且还需要能根据环境自动地设置。要设置这样一个合理的阈值就需要从噪声的性质入手通信系统中的噪声通常情况下是加性高斯白噪声(additive white Gaussian noise),在频域上表现为每一个 FFT 之后的点上附加的一个复噪声。

$$y_i = \hat{x}_i + N_i \quad (7)$$

其中  $y_i$  是降采样信号的 FFT 变换在  $i$  点的值,  $N_i$  是第  $i$  点的复噪声。是服从  $CN(0, \sigma^2)$  的复高斯随机变量实部和虚部均服从参数为  $N(0, \frac{1}{2}\sigma^2)$  的正态分布,其中  $\sigma^2$  是方差。

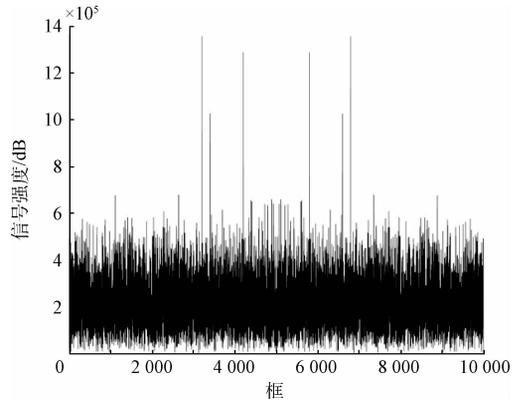


图 3 在 -20 dB 情况下框中的信号与噪声

不失一般性的,本文假设频域上每一点的噪声都是独立同分布的,即每一点上附加的噪声均服从同一统计规律。

噪声的模符合瑞利<sup>[15]</sup>分布:

$$f(r) = r \exp\left(-\frac{r^2}{2}\right) r \geq 0 \quad (8)$$

根据前文所述,在降采样以后得到的框,框的每一个点的值,在频域上是原频域上不同点的值的叠加。具体来说框中每一个点的频域的值都是  $P$  个独立同分布的服从  $CN(0, \sigma^2)$  的噪声点的叠加。所以在频域上框中任意一点的值服从  $CN(0, p\sigma^2)$ 。在滤去噪声的时候,主要是考虑它的模。它的模是一个随机变量,其概率密度函数是:

$$f(r) = \frac{r}{p\sigma^2} \exp\left(-\frac{r^2}{2p\sigma^2}\right) r \geq 0 \quad (9)$$

可以简单地求得分布函数是:

$$F(r) = 1 - \exp\left(-\frac{r^2}{2p\sigma^2}\right) r \geq 0 \quad (10)$$

框中每一个点的噪声在数学上表现为一个随机变量,理论上将噪声全部滤去是不现实的。只能按照一定的概率来滤去。如果框的长度是  $M$ ,选择一个概率  $v$ ,需要寻找的是一个阈值,使得框中仅剩  $n$  或小于  $n$  个点的噪声无法被滤去。也就是说需要寻找到一个最大的  $r$ ,满足:

$$\sum_{i=0}^n C_m^i (1 - F(r))^i (F(r))^{m-i} = v \quad (11)$$

这是一个非线性的方程,寻找解析解是异常困难的。还可以使用诸如 MATLAB 等数值工具对上式进行求解。

通过以上分析,提出噪声阈值算法如下:

- 1) 对环境噪声进行采样,计算噪声频域方差  $\sigma^2$ ;
- 2) 根据式(10)得到噪声的分布函数  $F(r)$ ;
- 3) 将分布函数代入式(11),求解出噪声门限阈值  $r$ 。

## 4 实验仿真

实验首先生成一个 500 MHz 的单频信号,对这个信号加上 0 dB 和 -25 dB 的高斯白噪声;然后用 50 MHz 的采样率去采样;接着计算出噪声的阈值。降采样时间均采用  $2 \times 10^{-4}$  s。信号源在降采样时间段内是持续出现的。

尽管信噪比是固定的,但由于噪声的能量是分散于整个通频带,而信号的能量却只集中于两个频点,所以更多的采样点数就意味着频率点上的值越大。注意如果在降采样周期内,信号不是持续出现的。那么过长的采样周期会使得信号变得不那么明显,从而无法有效地还原出来。

在信噪比 0 dB 的情况下用 50 MHz 的 AD 采样一个 117 MHz 的单频信号,信号带宽是 10 GHz。可以得到  $p=200, \sigma^2=9.9966 \times 10^6, m=10000$ 。此时使用 fzero 非线性求解器,选择  $n=2$ ,可以解得  $r=1.4168 \times 10^5$ ,此时框中单个点的噪声服从  $b=9993.65$  的瑞利分布。0 dB 信噪比时,框中噪声强度的 CDF 分布如图 4 所示。

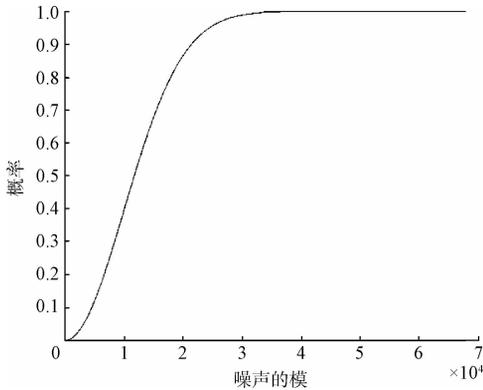


图4 0 dB 信噪比时框中噪声强度的 CDF

使用 MATLAB 中的 fzero 非线性求解器,选择  $n=2$ ,可以解得  $r=1.4168 \times 10^5$ 。

得到的框与阈值如图 5 所示。可以看到这个阈值将噪声全部滤去,并且没有影响到原信号。之所以有两个信号,是因为选取的 117 MHz 单频信号的正负信号被映射到框中,且没有碰撞。

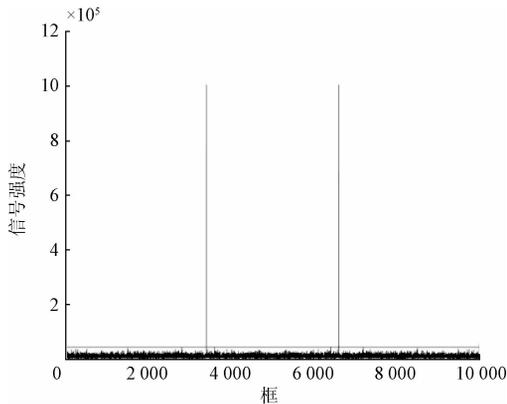


图5 0 dB 信噪比时求出的阈值

将信噪比降低到 -25 dB,这个时候。使用 MATLAB 的 fzero 非线性方程求解器,可以得到  $r=7.9692 \times 10^5$ 。

得到的框与阈值如图 6 所示。可以看到这个阈值的选取是合适的,噪声全被部滤去,并且没有影响到原信号。

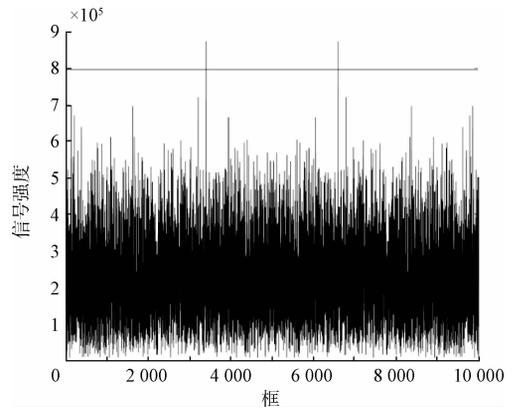


图6 -20 dB 信噪比时求出的阈值

## 5 结 论

本文在 BigBand 频谱感知算法的基础上,基于噪声参数的先验统计信息,提出了一种全新的噪声滤除阈值选取方法,能根据背景噪声方差的不同,自动调整阈值大小,成功的将噪声滤去。MATLAB 仿真实验结果表明,该算法在选取噪声滤除阈值时,能充分考虑到不同环境背景噪声强度对信号的干扰,为 BigBand 算法在频谱感知过程中的使用提供了一种实现方案。

## 参 考 文 献

- [1] 崔佳荣. FCC 频谱管理相关规划跟踪简析[J]. 中国无线电, 2016(9):51-52.
- [2] 曾莉. 认知无线电关键频谱感知技术及应用分析[J]. 通信与信息技术, 2017(1):59-62.
- [3] MISHALI M, ELDAR Y C, DOUNAIEVSKY O, et al. Xampling: Analog to digital at sub-nyquist rates[J]. IET Circuits Devices & Systems, 2009, 5(1):8-20.
- [4] 张京超,付宁,彭喜元,等. 一种面向信息带宽的频谱感知方法研究[J]. 物理学报, 2014, 63(3):30701-030701.
- [5] TROPP J A, LASKA J N, DURATE M F, et al. Beyond nyquist: Efficient sampling of sparse bandlimited signals [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2010, 56(1):520-544.
- [6] 秦乙,朱卫纲,胡旭,等. 宽带跳频信号的压缩采样与重构[J]. 国外电子测量技术, 2013, 32(9):25-28, 51.
- [7] 付宁,施睿,宋凌云,等. 基于欠采样的单音周期信号幅频测量方法实现[J]. 国外电子测量技术, 2015, 34(10):73-78.
- [8] 庄晓燕,赵贻玖. 谱稀疏信号随机等效采样重构方法研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2015, 29(10):1507-1512.

- [9] 史洪印,贾宝京,齐兆龙. 基于压缩感知的非均匀脉冲 SAR 欺骗性干扰抑制方法[J]. 仪器仪表学报, 2016,37(3):525-532.
- [10] 龚辉. 基于压缩信道感知的超宽带混合信道估计[J]. 电子测量技术,2015,38(8):135-139.
- [11] HASSANIEH H, SHI L, ABARI O, et al. GHz-wide sensing and decoding using the sparse Fourier transform[C]. Proceedings of IEEE Infocom, 2014: 2256-2264.
- [12] HASSANIEH H, INDYK P, KATABI D, et al. Simple and practical algorithm for sparse Fourier transform[C]. Acm-Siam Symposium on Discrete Algorithms, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2012:1183-1194.
- [13] LU Y, LV S, WANG X, et al. UWBS: Ultra-wideband spectrum sensing with multiple sub-nyquist sampling rates [C]. International Conference on Computational Science and Engineering, IEEE, 2014: 895-900.
- [14] MA Y, GAO Y, LIANG Y C, et al. Reliable and efficient sub-nyquist wideband spectrum sensing in cooperative cognitive radio networks [J]. IEEE Journal on Selected Areas in Communications, 2016, 34 (10): 2750-2762.
- [15] TSE D, VISWANATH P. Fundamentals of Wireless Communication [M]. Beijing: Posts & Telecom Press, 2009:B6-1 - B6-5.

## 作者简介

**樊楷**,1991 年出生,硕士研究生,主要研究领域为频谱感知算法。

**金彦亮**,1973 年出生,博士,副教授,主要研究领域为宽带无线通信、无线传感器网络。

**熊勇**(通讯作者),1973 年出生,博士后,研究员,主要研究领域为物联网行业应用技术。

E-mail:yong\_xiong@mail.sim.ac.cn

(上接第 140 页)

- [4] 张小红,任晓东,郭斐. 顾及电离层延迟高阶项改正的精密单点定位[J]. 武汉大学学报:信息科学版, 2013, 38(8):883-887.
- [5] 吴玮. 利用 GPS 双频观测值实现 PPP 电离层延迟高阶项改正[J]. 南京工业大学学报:自然科学版, 2015, 37(1):94-98.
- [6] KUMAR P N, SARMA A D, REDDY A S. Modelling of ionospheric time delay of Global Positioning System (GPS) signals using Taylor series expansion for GPS aided geo augmented navigation applications [J]. IET Radar Sonar Navigation, 2014, 8(9):1081-1090.
- [7] LI B. Study on ionospheric delay correction in GPS signal [C]. International Conference on Electronic Measurement & Instruments, IEEE, 2013:79-83.
- [8] 闫利军,连帅,高志远. 基于北斗和 GPS 导航系统的电离层延迟仿真分析[J]. 国外电子测量技术, 2014, 33(7):73-75.
- [9] 杨进佩,刘中,朱晓华. 用于无源雷达的 GPS 卫星信号性能分析[J]. 电子与信息学报, 2007, 29(5):1083-1086.
- [10] 关增社,王庆,李传君. 一种单频 GPS 反演误差改正方法研究[J]. 电子测量与仪器学报, 2008, 22(4):53-56.
- [11] 高为广,张瑞,何倩倩. 多卫星导航系统电离层穿刺点分布的仿真分析[J]. 测绘科学, 2015, 40(6):17-20.
- [12] 李建胜. 电离层对雷达信号和导航卫星定位影响的分析与仿真研究[D]. 郑州:解放军信息工程大学, 2011.
- [13] LIU X F, YUAN Y B, HUO X L, et al. Model analysis method (MAM) on the effect of the second-order ionospheric delay on GPS positioning solution[J]. Science Bulletin, 2010, 55(15):1529-1534.
- [14] 朱雪莹,胡文龙,张浩龙,等. 基于峰值旁瓣比估计电离层 TEC 的方法[J]. 国外电子测量技术, 2015,34(6):25-28.
- [15] 李雨龙,张弘毅,黄丽佳,等. 同步轨道 SAR 电离层影响分析与仿真研究[J]. 电子测量技术, 2014, 37(9):14-22.
- [16] ENGLE J, BAROTT W C. Effect of the ionospheric delay on passive bistatic radar using spaceborne UHF illuminators[C]. Southeastcon, 2012 Proceedings of IEEE, 2012:1-5.

## 作者简介

**彭章友**,教授,主要研究方向为无线通信等。

**王春娜**,硕士研究生,主要研究方向为电离层延迟对外辐射源无源雷达定位的影响。

E-mail:wcn6391@163.com