

# 稀疏傅里叶变换在雷达中的应用研究

张秀丽<sup>1,2</sup> 王浩全<sup>1</sup> 庞存锁<sup>1</sup>

(1. 中北大学信息与通信工程学院 太原 030051; 2. 中北大学信息商务学院 太原 030600)

**摘要:** 针对传统傅里叶变换计算量与所分析信号长度成正比,当采样率较大时,需要较大的运算时间问题,提出采用稀疏傅里叶变换(SFT)进行雷达信号处理,由于实际雷达目标多普勒频率个数有限,满足 SFT 方法使用条件,对 SFT 中的滤波器参数以及分段长度选择进行了分析与讨论,并给出了 SFT 处理雷达信号时的数学表达式;最后,利用仿真数据验证了该方法的性能,结果显示 SFT 在计算速度方面优于传统方法,可以提高目标信号参数的估计速度。

**关键词:** 快速傅里叶变换; 稀疏傅里叶变换; 雷达信号处理; 计算速度

**中图分类号:** TN973.3    **文献标识码:** A    **国家标准学科分类代码:** 510.70

## Application research of sparse Fourier transform in radar

Zhang Xiuli<sup>1,2</sup> Wang Haoquan<sup>1</sup> Pang Cunsuo<sup>1</sup>

(1. School of Information and Communication Engineering, North University of China, Taiyuan 030051, China;

2. College of Information and Business, North University of China, Taiyuan 030600, China)

**Abstract:** For a long time sequence radar signal, fast Fourier transform (FFT) needs large computation, In order to solve this problem, the paper proposes to use sparse Fourier transform (SFT) for radar signal processing, due to the actual radar target Doppler frequency numbers is limited, to meet the SFT method using conditions. In the paper, the SFT filter parameters and segment length selection are analyzed and discussed, and gives the SFT mathematical expression of the radar signal processing; Finally, the performance of the proposed method is validated with simulation data, the results show that the SFT is superior to the traditional methods in computational speed, and the estimated speed of the target signal parameters can be improved.

**Keywords:** fast Fourier transform; sparse Fourier transform; radar signal processing; computational speed

## 0 引言

众所周知,快速傅里叶变换(FFT)是数字信号处理领域中最重要的一种算法,它的运算时间正比于输入信号的长度。然而,在许多应用中所分析信号的傅里叶系数仅有一小部分有用,大部分可以忽略,因此这时信号的傅里叶输出是稀疏的,针对图像稀疏信号的处理,文献[1-6]中的 MPEG 和 JPEG 技术利用了离散余弦变换(DCT)方法进行数据压缩,它在图像领域得到了广泛的应用,但随着信息社会的发展,需要压缩比更大算法的出现;针对长序列信号的线性卷积,文献[7-9]采用了哈达玛变换进行处理;针对信号在不同域的稀疏特征,文献[10-12]利用压缩感知方法进行信号处理,该信号在某个变换域的结构具有稀疏性质,可将高维信号投影到低维空间,利用该理论采样率可以不满足奈奎斯特采样定理,但该理论中变换域最优观测矩阵难以找到,重构算法较复杂。针对长时间序列信号的频谱分

析,文献[13-14]采用了稀疏傅里叶变换,但文献[15]需用到非均匀信号的 FFT 计算,并利用位检测法对信号频率进行选择,运算量较大。为了克服运算效率低以及提高估计精度,文献[15]提出了一种改进的稀疏傅里叶变换(SFT),该方法对滤波器进行了改进,可提高估计精度,进一步降低运算量,得到了国内外广大学者的重点研究。文献[15]中方法较其他方法有优势,但文献中没有对滤波器参数,分段信号长度的选择进行详细说明;本文针对上述问题,结合仿真实验进行了分析与讨论,给出了定性指导;并应用 SFT 方法对宽带雷达信号中的时延估计问题进行了分析与探讨;最后,利用仿真实验比较了 SFT 与 FFT 方法的检测性能和运算速度。

## 1 SFT 变换

SFT 变换适用的前提条件是假设所分析信号的频谱是稀疏的,然后采用滤波器将所分析信号的傅里叶系数分

成较少的几组,其中每组仅有一个较大系数,最后通过对最大系数的寻找,确定信号频率的位置和大小。

### 1.1 欠采样存在的问题

SFT方法要利用欠采样实现信号的估计和重构,但欠采样根据奈奎斯特采样定理可知会使信号出现混叠现象,如设信号  $x(n) = \cos(2\pi n/12)$ ,  $n = 1, 2, \dots, 12$ , 图1(a)所示为其时域波形;傅里叶变换  $X(n)$  的波形如图1(b)、(c)所示。

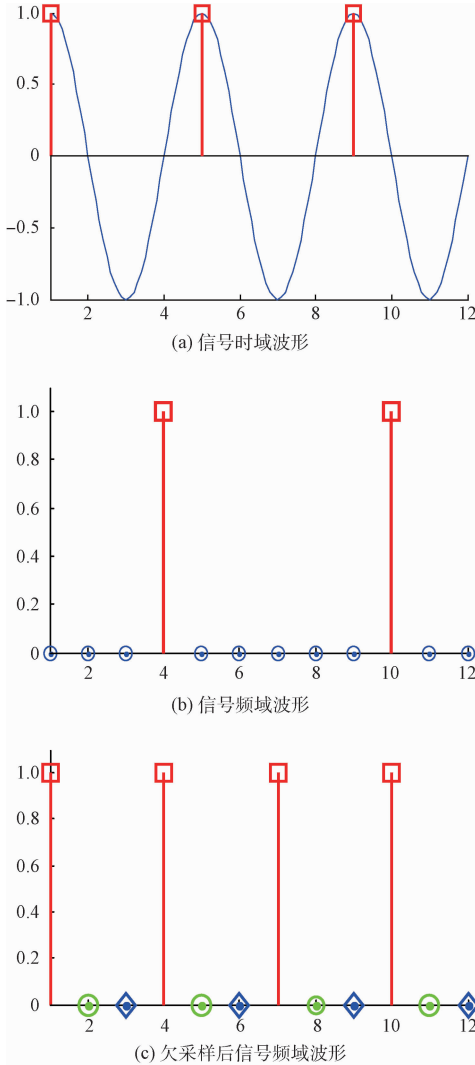


图1 信号时域与频域波形

图1(b)显示了直接对图1(a)进行FFT后的处理结果,可以看出  $\hat{x}(4) = \hat{x}(10) = 1$ , 信号频谱没有发生混叠;图1(c)显示了对图1(a)进行4倍抽样后的FFT结果,结果表明除了在点  $\hat{x}(4)$ 、 $\hat{x}(10)$  处函数值为1,其余地方也出现了幅值为1的点,并且这些点的分布具有一定的规律,如图中不同形状所示。这表明信号在时域的欠采样,在频域会造成频谱混叠,反之亦然。

### 1.2 SFT算法步骤

为了克服欠采样以及频谱密集给信号恢复与估计带来

的困难,文献[15]对所分析的信号进行了以下处理。

#### 1) 构造新的序列信号

设输入信号为  $x(n)$ , 其对应的傅里叶变换为  $X(n)$ , 则经过重排后新序列信号为:

$$s(n) = x\{\text{mod}[\sigma \cdot n, N]\}, \sigma, n \in [1, N] \quad (1)$$

式中:  $\sigma$  是一个随机变量,且为奇数,与  $N$  满足  $\text{mod}[\sigma \times \sigma^{-1}, N] = 1$ , 这保证了  $\sigma$  与  $N$  互为质数,  $\sigma^{-1}$  是  $\sigma$  的模逆算子。

式(1)中  $x(n)$  和  $s(n)$  根据傅里叶变换可得在频域满足关系:

$$S(m) = X\{\text{mod}[\sigma^{-1} \cdot m, N]\}, m \in [1, N] \quad (2)$$

式(2)表示输入信号经过重排后,其对应的频谱信号位置也发生了变化,通过这种方法可以使原来信号中相近的频谱进行分离,利于后续的滤波处理。

#### 2) 滤波函数的选择

为了分离出不同位置的频谱成份,并尽可能避免所在位置频谱泄露,根据滤波器理论可知,需选用一个时频分辨率都高的滤波器进行滤波处理,平窗滤波器窗函数定义:  $g(\epsilon, \epsilon', \delta, \omega)$  为对称函数,  $\epsilon, \epsilon'$  分别是通带和阻带频率,  $\delta$  为副瓣波动系数,  $\omega$  为窗的时域宽度,其大小近似为  $O(1/\epsilon - \epsilon' \log_2 n/\delta)$ , 其在频域的形式如式(3)。

$$G(m) \in \begin{cases} [1 - \delta, 1 + \delta], & m \in [-\epsilon'N, -\epsilon'N] \\ [0, \delta], & m \notin [-\epsilon'N, -\epsilon'N] \end{cases} \quad (3)$$

#### 3) 序列分段

为了提高信号的频谱计算速度,需要对待测信号进行分段处理,这里定义  $y(n) = g(n) \cdot s(n)$ ,  $n \in [1, N]$ , 其中  $y(n)$  的有效支撑范围为  $n \in [-\omega/2, \omega/2]$ ,  $B$  为信号的分段长度,则分段后信号可重组为:

$$z(n) = \sum_{q=0}^{\text{int}[\omega/B]-1} y(n + Bq), n \in [1, B] \quad (4)$$

对式(4)进行DFT后的表现形式为:

$$Z(k) = DFT[z(n)] = \sum_{n=0}^{B-1} z(n) e^{-j2\pi/Nk(n/B)} = \sum_{n=0}^{B-1} \sum_{q=0}^{\text{int}[\omega/B]-1} y_{n+Bq} e^{-j2\pi/Nk(n/B)}, n, k \in [1, B] = Y[k \cdot (n/B)] \quad (5)$$

式中:  $Z(k)$  是  $z(n)$  的傅里叶变换,  $Z(k)$  将会发生频谱混叠,其值为  $Y(k)$  中频谱混叠相加后的结果。

#### 4) 最大位置估计和频率估计

经过上述处理后,每个频谱组内极有可能含有目标信号,为了获得目标信号的正确估计,首先需要式(5)中信号的最大位置进行估计,然后再次基础上进行频率估计。其中位置估计函数为:

$$J_i = \underset{k}{\text{argmax}} |Z(k)|, i \in [1, 2k] \quad (6)$$

对式(6)中获得的位置进行还原处理后为:

$$I_i = \{m \in [1, N] | h_\sigma(m) \in J\}, i \in \left[1, \frac{2kN}{B}\right] \quad (7)$$

其中  $k$  为目标最大频率估计数。

由式(7)获得位置估计后,可根据式(8)完成频率系数的估计,其表现形式为:

$$\hat{X}(m) = \begin{cases} \frac{Z[h_o(m)]e^{-j\pi o_s(m)\omega/N}}{G[o_s(m)]}, & m \in I \\ 0, & m \in [1, N] \cap \bar{I} \end{cases} \quad (8)$$

其中:  $h_o(m)$  定义为哈希函数,  $o_s(m)$  定义为误差函数,其表达式分别为:

$$h_o(m) = [\sigma \cdot m \cdot B/N] \quad (9)$$

$$o_s(m) = \sigma \cdot m - h_o(m) \cdot N/B \quad (10)$$

### 1.3 SFT 算法流程

根据上述分析,图 2 给出了 SFT 算法的执行流程。

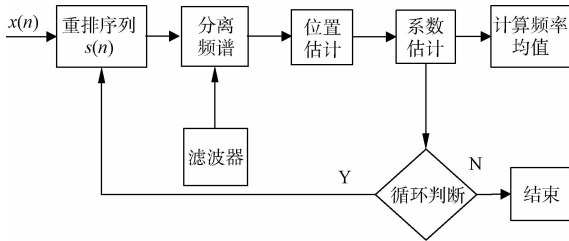


图 2 SFT 算法执行流程

## 2 SFT 算法在雷达中的应用分析

雷达信号处理中,傅里叶变换在分析目标的位置和速度信息时起到了重要作用,理论上能够使用 FFT 的地方都有可能利用 SFT 进行代替;但是,对于实际的雷达目标由于目标回波信噪比的不同,SFT 算法难以直接进行替换,当回波信噪比较高时,可以直接使用;而当回波信号信噪比较低时,无法直接进行应用,下面分两种情况进行分析。

设雷达发射信号为 LFM 信号  $s(t)$ , 回波信号为  $r(t) = s(t - \tau)$ ,  $\tau$  为回波时延,根据雷达理论可得目标离雷达的距离可表示为:

$$R = \frac{c}{2} \tau = \frac{c}{2} \times$$

$$\operatorname{argmax}_i |IFFT\{FFT[s \cdot (t)] \cdot FFT[r(t)]\}| \quad (11)$$

从式(11)中可以发现估计距离时共用到 3 次傅里叶变换,但需注意由于 3 次处理的信号不同,故 SFT 算法需结合实际情况进行分析应用。

#### 1) 信噪比较高时

$FFT[s(t)]$ 、 $FFT[r(t)]$  针对发射信号和回波信号进行傅里叶运算,其输出频谱并非稀疏形式,无法利用 SFT 进行处理,而  $IFFT\{\cdot\}$  算法表示的是目标时延位置,输出目标信号一般为稀疏形式,可以进行 SFT 处理,因此,式(11)应用 SFT 算法改进后的形式为:

$$R = \frac{c}{2} \operatorname{argmax}_i |SIFT\{FFT[s \cdot (t)] \cdot FFT[r(t)]\}| \quad (12)$$

值得注意的是当雷达发射信号为正弦信号时,式(11)可进一步表示为:

$$R = \frac{c}{2} \operatorname{argmax}_i |SIFT\{SFT[s \cdot (t)] \cdot SFT[r(t)]\}| \quad (13)$$

#### 2) 信噪比较低时

针对式(11)中信噪比低的情况,利用 SFT 难以达到真正的快速运算,为了利用 SFT 提高算法速度,可首先适当增加可能的目标点数,而后再利用 SFT 进行计算。

设对式(12)中  $SIFT\{\cdot\}$  处理后结果进行搜索,把超过门限  $Th_1$  的点作为目标信号,其输出结果为:

$$SIFT'\{\cdot\} = \begin{cases} SIFT\{\cdot\}, & |SIFT\{\cdot\}| \geq Th_1 \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \quad (14)$$

式中:  $i$  为目标数目,为了提高目标信号的检测概率,  $Th_1$  的门限值可设为满足虚警概率为  $10^{-3} \sim 10^{-2}$ 。

将式(14)代入(12)可得:

$$R = \frac{c}{2} \times \operatorname{argmax}_i |SIFT'\{FFT[s \cdot (t)] \cdot FFT[r_i(t)]\}| \quad (15)$$

最后,对式(15)所得结果联系目标的帧间结果进行位置确定。

## 3 仿真与性能分析

### 3.1 滤波器参数对结果的影响

设信号长度为 5 120,采样频率为 1 000 Hz,目标 1、2、3 的信号频率分别为 10、60、120 Hz,幅值比为图 3 给出了 SFT 算法中滤波器分析的结果,其中滤波器的截止频率系数  $\xi = 0.01$ ,波纹系数  $\delta = 10^{-6}$ ,信号分段长度  $B$  为 32。图 3(a)表明滤波器波纹系数越小,所得的滤波器频率窗越窄;图 3(b)表明滤波器截止频率系数越小,所得滤波器频率窗越窄,窗长越窄,越有利于提高信号的频率分辨率。

### 3.2 分段长度 $B$ 对结果的影响

仿真参数同 3.1 节,图 4 给出了  $B$  不同时,3 个信号通过滤波器后的频谱分析结果,从中可以看出  $B = 16$  时,分析结果仅含有一个目标信号的频谱; $B = 128$  时,3 个目标信号的频谱都可以获得,这时由于当  $B$  较小时,信号长度较小,所获得的频率分辨率较差( $B = 16$ ,分辨率  $\Delta F = 63$  Hz),不能实现对目标的分离,因此实际使用中尽可能增大信号的分析长度,但长度的增大会导致运算量的增加,因此所折中考虑。

### 3.3 SFT 算法性能分析

设雷达载频为 10 GHz,发射信号带宽为 150 MHz,脉冲重复频率 300 Hz,脉宽为  $5 \mu s$ ,采样频率 150 MHz,目标距离雷达 40 km。图 5、6 给出了 SFT、FFT 方法在不同信噪比下的检测性能对比结果,其中 SFT 仿真实验中设滤波器截止频率系数为 0.03,波纹为  $10^{-6}$ , $B = 128$ ,定位循环次数为 5,估值循环次数为 10。

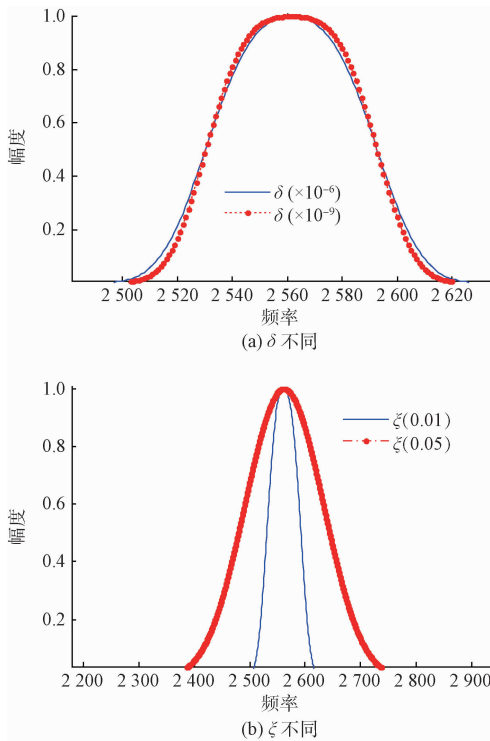


图 3 不同  $\delta$  和  $\zeta$  下频域窗宽度对比

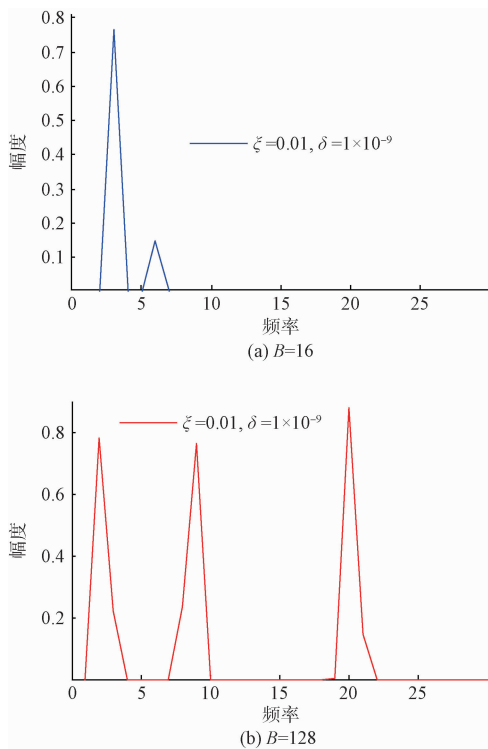


图 4 不同  $B$  时,三目标信号经过滤波器后的结果

对比图 5 与 6 的结果可以看出,当信噪比降低时,SFT 算法中出现了虚假目标,这是由于 SFT 算法分段后信号长

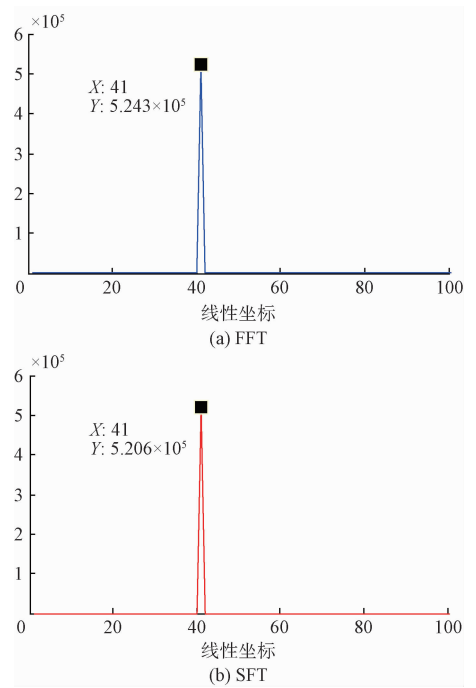


图 5 SFT 与 FFT 处理结果对比(信噪比为  $-4$  dB)

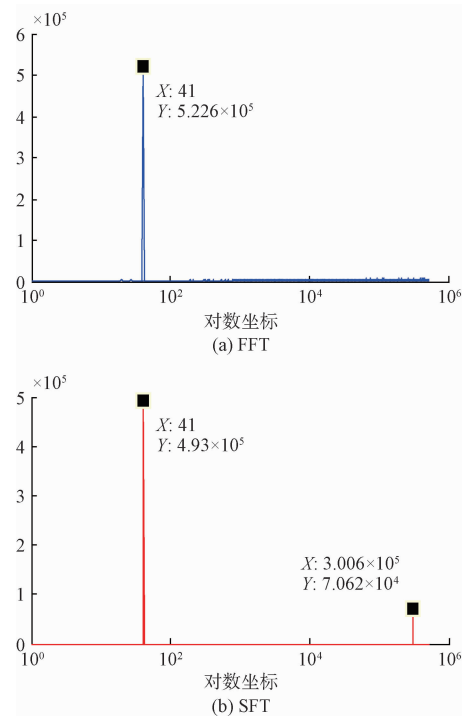


图 6 SFT 与 FFT 处理结果对比(信噪比为  $-8$  dB)

度变小,会导致局部大噪声信号被误判为目标信号,因此,针对微弱目标信号,可适当增大分段内目标点的数目。另外,按照复乘运算量分析可得,FFT 复乘运算量为 4 980 736 次,SFT 复乘运算量 342 360 次,两者相差约 15

倍,因此,采用 SFT 方法可大大提高目标参数的估计速度。

## 4 结 论

本文分析了 SFT 方法的信号处理流程,给出了滤波器参数与分段长度选择时需要考虑的影响因素,并给出了 SFT 方法在雷达信号处理中的数学表达式,仿真结果验证了该方法具有较好的检测性能和运算速度优势,针对低信噪比,SFT 方法需要和其他方法进行综合处理。另外,本文虽然仅对 SFT 估计目标时延的问题进行了分析,但该方法也可应用于目标速度估计、目标成像、目标特征提取等领域。

## 参考文献

- [1] 桑庆兵. 基于 DCT 系数无参考模糊图像质量评价方法[J]. 仪器仪表学报, 2013, 34(11): 2599-2604.
- [2] 赵杰. 一种基于 DCT 量化的视频水印算法[J]. 电子测量技术, 2016, 39(6): 72-75.
- [3] 梅雪. 基于 STC 码和分段嵌入的 JPEG 隐写技术研究[J]. 计算机工程与应用, 2016, 52(20): 118-121, 199.
- [4] 陈波, 王红霞, 成礼智. 图像压缩中的快速方向离散余弦变换[J]. 软件学报, 2011, 22(4): 826-832.
- [5] 张金全, 王宏霞. DCT 和 DWT 域音频水印幅值变化规律分析[J]. 电子学报, 2013(6): 1193-1197.
- [6] 蔡春晓, 黄雄华. 一种离散余弦变换域抗同步攻击的音频水印算法[J]. 光电子·激光, 2016(3): 310-316.
- [7] 乔志伟, 魏学业, 韩焱. 用快速哈达玛变换(FHT)实现高速线性卷积[J]. 电子测量与仪器学报, 2010, 24(3): 263-267.
- [8] 吉莉. 哈达玛变换编码探测信号重建和降噪技术研究[D]. 南京:南京理工大学, 2015.
- [9] 张毅, 王勇, 岳江, 等. DMD 编码哈达玛变换高灵敏成像[J]. 红外与激光工程, 2015(12): 3819-3824.
- [10] 孙斌. 传感器网络中基于压缩感知的压缩域目标跟踪算法研究与应用[J]. 电子测量与仪器学报, 2016, 30(11): 1617-1625.
- [11] 李鹏, 郑太成, 徐丽华, 等. 稀疏基阵水下声成像的压缩感知方法[J]. 仪器仪表学报, 2016, 37(8): 1843-1850.
- [12] 王强, 张培林, 王怀光, 等. 压缩感知中测量矩阵构造综述[J]. 计算机应用, 2017(1): 188-196.
- [13] IWEN M A, GILBERT A C, STRAUSS M. Empirical evaluation of a sub-linear time sparse DFT algorithm [J]. Communications in Mathematical Sciences, 2007, 5(4): 981-998.
- [14] 那美丽, 周志刚, 李霏霏. 基于稀疏傅里叶变换的低采样率宽带频谱感知[J]. 电子技术应用, 2015(11): 85-88.
- [15] GILBERT A C, INDYK P, IWEN M A, et al. Recent developments in the sparse Fourier transform: A compressed fourier transform for big data [J]. IEEE Signal Processing Magazine, 2014(9): 91-100.

## 作者简介

**张秀丽**, 1988 年出生, 硕士, 助理实验师, 研究方向为信号与信息处理。

E-mail: zhangxiuli54@163.com

**王浩全**(通讯作者), 1971 年出生, 博士, 教授, 研究方向为信号处理、无损检测等。

E-mail: wanghaoquan12@163.com.

**庞存锁**, 1978 年出生, 博士, 副教授, 主要研究方向为雷达信号处理、基于 FRFT 变换的非线性信号分析、目标微动特性分析等。

E-mail: pangcunsuo@126.com