

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2212476

绿色 VRP 的增强拉格朗日松弛启发式算法*

徐林浩¹ 胡蓉¹ 钱斌¹ 于乃康²

(1.昆明理工大学信息工程与自动化学院 昆明 650500; 2.昆明理工大学机电工程学院 昆明 650500)

摘要: 针对绿色多车型车辆路径问题(GHFVRP),建立了以最小化车辆固定成本、行驶成本及碳排放成本之和为优化目标的混合整数规划模型(MIP),并提出一种增强拉格朗日松弛启发式算法(ELRHA)进行求解。首先,通过松弛难约束构造对偶问题,并分解为两个子问题,再采用次梯度法更新拉格朗日乘子,求解两个子问题获得原问题的下界;其次,设计一种两阶段启发式算法对下界进行修复及优化,以获得较好可行解并更新问题上界;最后进行仿真实验,实验结果表明:在相同实验环境下对17个算例进行20次测试,ELRHA平均求解间隙为4.49%,相较Gurobi提升3.28%,同时与其它算法对比进一步验证了ELRHA能求解问题高质量上界。可见,ELRHA能有效求解GHFVRP。

关键词: 绿色多车型车辆路径问题;混合整数规划;拉格朗日松弛;次梯度;下界

中图分类号: TP391.9 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.80

Enhanced lagrange relaxation heuristic algorithm for solving green VRP

Xu Linhao¹ Hu Rong¹ Qian Bin¹ Yu Naikang²

(1. School of Information Engineering and Automation, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China;

2. School of Mechanical and Electrical Engineering, Kunming University of Science and Technology, Kunming 650500, China)

Abstract: Aiming at the green heterogeneous fleet vehicle routing problem(GHFVRP), a mixed integer programming (MIP) model with the optimization objective of minimizing the sum of vehicle fixed cost, driving cost and carbon emission cost was established, and an enhanced Lagrange relaxation heuristic algorithm (ELRHA) is proposed to solve it. Firstly, the dual problem is constructed by relaxation difficulty constraint and decomposed into two subproblems. Then the Lagrange multiplier is updated by subgradient method, and the lower bound of the original problem is obtained by solving the two subproblems. Secondly, a two-stage heuristic algorithm is designed to repair and optimize the lower bound to obtain a better feasible solution and update the upper bound. Finally, the simulation experiment is carried out. The experimental results show that 17 examples are tested for 20 times under the same experimental environment. The average solving gap of ELRHA is 4.49%, which is 3.28% higher than Gurobi. Meanwhile, the comparison with other algorithms further verifies that ELRHA can solve the problem with high quality upper bound. It can be seen that ELRHA can effectively solve GHFVRP.

Keywords: green heterogeneous-fleet vehicle routing problem; mixed integer programming; Lagrange relaxation; subgradient; lower bound

0 引言

运输配送问题是物流业的关键问题。在总物流成本中,配送成本一直占有较高比例。配送成本通常由路径规划决定,即车辆路径问题(vehicle routing problem, VRP),该问题由Dantzig等^[1]于1959年首次提出,一般描述为:在给定1组位于仓库的车辆和需要服务的客户后,需要规划各车辆服务客户的路线,从而能满足客户需求、车辆载重和

行驶里程等约束,并达到行驶里程最小或总费用最少等目的^[2]。随着经济社会的高速发展,客户需求向多品种、小批量的模式发展,致使单车型配送无法满足客户需求,多车型配送需求明显增加。目前,多车型配送已广泛存在于实际生活中。例如,冷链物流配送、城市生活垃圾分类运输、城市商超物流配送等,均需灵活选择不同车型来控制成本^[3-5]。同时,竞争日益激烈的市场环境迫使企业降低物流运营成本。此外,在持续推进节能减排,坚持绿色发展背景

收稿日期:2022-12-24

*基金项目:国家自然科学基金(61963022,62173169)、云南省基础研究重点项目(202201AS070030)资助

下,考虑配送过程中的燃油消耗和碳排放等因素的绿色物流配送已开始受到重视^[6]。因此,研究绿色多车型车辆路径问题(green heterogeneous-fleet vehicle routing problem, GHFVRP)具有重要的现实意义。同时,由于 VRP 为典型的 NP-hard 问题^[7],而 VRP 可归约为 GHFVRP,故 GHFVRP 也属于 NP-hard 问题。显然,对其展开研究也具有很高的理论价值。

针对 VRP 及其相关拓展问题,通常可建立两类问题模型。一类是将车辆服务顺序和问题约束隐含起来的排序模型,该类模型通常采用基于种群的或基于邻域的启发式算法进行求解,例如遗传算法、蚁群算法、分布估计算法、迭代启发式算法等^[2,8-10]。该类算法核心思想是根据问题特性及约束条件来设计相应的编解码规则,再通过不同的迭代机制搜索问题解空间,从而可在合理时间内获得问题的满意解,但不能保证得到全局最优解,也无法定量判断所得解的优劣程度。另一类是由目标函数和多条显式约束组成的数学模型^[11],其对应的求解算法主要为分支定界、列生成和拉格朗日松弛算法(lagrange relaxation, LR)等精确算法^[12-15]。该类算法通过分析数学模型的代数几何结构,设计相应算法来获取问题的解。对于凸优化问题和少数特殊结构的非凸优化问题,精确算法可在较短时间内(即多项式时间内)获取问题的最优解。然而,对于大量存在于现实中的复杂非凸优化问题(如 VRP 和 GHFVRP),尚无多项式时间可获取最优解的通用算法。精确算法为确保最优解不丢失,往往采用遍历或部分遍历解空间的搜索机制。这使其无法在较短时间内获取较大规模复杂非凸优化问题(如 VRP 的客户数大于 30)的满意解。

近年来,为弥补精确算法求解复杂非凸优化问题时间过长且效果不佳的不足,部分学者综合精确算法和启发式算法的优势,采用混合算法求解 VRP。部分学者采用混合算法对 VRP 和绿色 VRP 进行了研究^[16-19],取得了相应成果。Behnke 等^[20]针对优化目标为最小化碳排放量的 GHFVRP,建立数学模型,并提出一种启发式列生成(heuristic column generation, HCG)与 B&P 相结合算法进行求解,通过实例测试验证了所提算法的有效性。通过文献调研可知,运用基于精确算法的混合算法求解 GHFVRP 的研究仍非常有限。

LR 是一种获取复杂非凸优化问题较紧下界的基本框架。LR 的基本思想是使用拉格朗日乘子,将问题模型中的难约束引入目标函数,形成松弛问题,进而分解成易于求解的子问题。然后,通过不断更新迭代乘子,求得松弛问题的解。该解一般为不可行解,其对应的目标函数值为原问题的下界。部分学者在 LR 下界基础上,利用某种启发式算法将下界对应的解(多为原问题的不可行解)修复为原问题的可行解^[21-22]。为进一步提升 LR 启发式算法的性能,近年的少量研究也尝试在启发式算法部分进一步加入搜索操作,从而对修复后的可行解附近区域进行适当搜索,取得

了良好效果^[23-24]。

本文针对 GHFVRP,提出增强拉格朗日松弛启发式算法(enhanced lagrange relaxation heuristic algorithm, ELRHA)求解。ELRHA 的创新和特点在于以下 3 个方面。首先,在下界获取方面,分析问题模型结构,选取影响车辆行驶距离和服务客户数量的载重约束(难约束)进行松弛,将松弛问题分解成两个子问题,降低问题求解难度,通过求解子问题获取问题下界。其次,在下界修复方面,考虑问题特征,以载重约束条件为导向,设计相邻客户尽量由同一车辆配送的修复策略,将下界修复为较优的可行解。然后,在可行解改进方面,结合问题解的构成特点,设计 6 种邻域操作在可行解附近区域进行高效搜索,有助于快速发现高质量解。在不同规模问题上的实验对比,验证了 ELRHA 的有效性。

1 GHFVRP 描述与数学模型

1.1 GHFVRP 描述及相关假设

GHFVRP 定义为一个有向图 $G = (V, E)$, 其中, $V = \{0, 1, 2, \dots, N\}$ 是仓库客户集合且 0 表示仓库, $E = \{(i, j) \mid i, j \in V, i \neq j\}$ 为路径集合。该问题建立在已知仓库客户位置(以 km 为单位)、客户需求(以 kg 为单位)及车辆载重的条件下,合理规划车辆为客户配送物资的路线,使配送总运费最小,问题示例如图 1 所示。

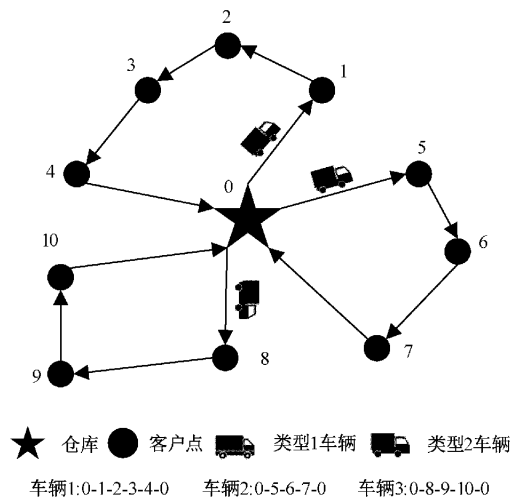


图 1 GHFVRP 问题示例

GHFVRP 满足如下假设:

- 1) 仓库内所有车型的所有车辆参与配送任务。
- 2) 每辆车仅执行 1 次配送任务。
- 3) 车辆从仓库出发,完成服务后需要回到原仓库。
- 4) 每个客户只能被 1 辆车配送服务 1 次。
- 5) 车辆负载不能超过该车型的最大载重。
- 6) 车辆在配送过程中保持匀速行驶,忽略道路对车辆的影响。

同时, GHFVRP 相关符号定义如表 1 所示。

表 1 符号及定义

符号	说明	符号	说明
F_1	运输距离费用	k	车辆编号 k
F_2	车辆固定成本	p	车型编号 p
F_3	车辆碳排放费用	d_{ij}	节点 i 到节点 j 的距离
F_4	配送货物碳排放费	Q_p	第 p 类型车的最大载重量
N	客户数	E_{ij}	路径 (i, j) 的碳排放量
M	共有 M 种类型的车	M_s	全部车型集合 $\{1, 2, \dots, M\}$
W_p	第 p 类型车的自重	H_{ps}	p 车型集合 $\{1, 2, \dots, H_p\}$
q_i	客户 i 的货物需求量	H_p	p 车型的辆数
i, j	节点 i, j	σ_i	MTZ 中的一个变量
α_p	第 p 类型车的单位距离费用系数, 取值为 1 元/km	V	仓库客户集合 $\{0, 1, 2, \dots, N\}$ (0 表示仓库)
c_p	第 p 类型车的固定发车费用	w_{pijk}	第 p 类型第 k 辆车在弧 (i, j) 上载货量
c_e	单位碳排放费用, 取值为 0.2 元/kg	x_{pijk}	车型 p 的第 k 辆车从节点 i 到节点 j 的决策变量

1.2 GHFVRP 混合整数规划模型

问题优化目标:

$$\text{Min}Z = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 \quad (1)$$

其中,

$$F_1 = \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_p x_{pijk} d_{ij} \quad (2)$$

$$F_2 = \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{j=1}^N c_p x_{p0jk} \quad (3)$$

$$F_3 = c_e \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N E_{ij}^{car} x_{pijk} \quad (4)$$

$$F_4 = c_e \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N E_{ij}^{goods} \quad (5)$$

问题约束:

$$\sum_{j=1}^N x_{p0jk} = \sum_{j=1}^N x_{pj0k} = 1, \forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps} \quad (6)$$

$$\sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N x_{pijk} = 1, i \neq j, \forall j \in V \setminus \{0\} \quad (7)$$

$$\sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{j=0}^N x_{pijk} = 1, i \neq j, \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (8)$$

$$\sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N x_{pijk} = 0, i = j \quad (9)$$

$$\sum_{i=0}^N x_{pijk} = \sum_{i=0}^N x_{pijk}, \forall j \in V \setminus \{0\}, \quad (10)$$

$$\forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps}$$

$$\sigma_i - \sigma_j + 1 - N(1 - \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} x_{pijk}) \leq 0, \quad (11)$$

$$i \neq j, \forall i \in V \setminus \{0\}, \forall j \in V \setminus \{0\}$$

$$w_{pijk} \leq x_{pijk} Q_p,$$

$$i \neq j, \forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps}, \forall i \in V, \forall j \in V \quad (12)$$

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=0}^N x_{pijk} q_i = \sum_{j=1}^N w_{p0jk}, \quad (13)$$

$$\forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps}$$

$$\sum_{i=0}^N w_{pijk} - q_j \sum_{i=0}^N x_{pijk} = \sum_{i=0}^N w_{pijk}, \quad (14)$$

$$\forall j \in V \setminus \{0\}, \forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps}, i \neq j$$

$$x_{pijk} = \begin{cases} 1, & \text{若第 } p \text{ 类型的第 } k \text{ 辆车从节点 } i \text{ 移动到节点 } j \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$i \neq j, \forall i \in V, \forall j \in V, \forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps} \quad (15)$$

$$w_{pijk} \geq 0, \forall i \in V, \forall j \in V, \forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps} \quad (16)$$

其中, 式(1)为优化目标函数, 该优化目标由运输距离费用 F_1 、车辆固定成本 F_2 、车辆自身碳排放费用 F_3 和配送货物碳排放费用 F_4 组成, F_3 和 F_4 根据 1.3 节中的碳排放模型计算; 式(6)要求仓库内所有车型的所有车辆均需参与配送, 且配送完后返回原仓库; 式(7)~(9)要求每个客户只能被 1 辆车服务 1 次; 式(10)为车辆服务客户点 j 的流平衡约束; 式(11)为 MTZ 子环路消除约束; 式(12)要求路径 (i, j) 上的载货量小于等于车辆载重; 式(13)要求所有车辆从仓库出发的载货量等于其所要服务客户的货物总需求; 式(14)表示车辆服务完某节点后的载货量等于从该节点出发时的车辆载货量; 式(15)、(16)表示决策变量。

1.3 碳排放模型

在绿色车辆路径问题中, 碳排放主要来自于燃油的消耗。由于多种因素影响车辆的燃油消耗, 计算十分复杂, 因此, 本文采用文献[25]的综合排放模型对油耗进行计算, 同时为简化计算, 多车型区别主要体现在车辆自重、载重以及发动机排量上, 其他参数取值相同, 相关参数定义^[26]如表 2 所示。

碳排放量计算公式为:

$$E_{ij} = e \frac{\varphi}{\mu \zeta} \left(\frac{sSV_p}{v} + \frac{\alpha(W_p + w_{pijk}) + \beta v^2}{1000\epsilon\eta} \right) d_{ij} \quad (17)$$

$$\alpha = a + g \sin\theta + gC_r \cos\theta \quad (18)$$

$$\beta = 0.5C_d A \rho \quad (19)$$

$$\text{令 } E_{ij}^{car} = e \frac{\varphi}{\mu\zeta} \left(\frac{sSV_p}{v} + \frac{\alpha W_p + \beta v^2}{1\,000\epsilon\eta} \right) d_{ij} \quad (20)$$

$$E_{ij}^{goods} = e \frac{\varphi}{\mu\zeta} \cdot \frac{\alpha \omega_{pijk}}{1\,000\epsilon\eta} d_{ij} \quad (21)$$

其中,式(17)为路径 (i,j) 上的油耗计算公式;式(18)为路径特定常数;式(19)为车辆特定常数;式(20)表示路径 (i,j) 上车辆自重油耗;式(21)表示路径 (i,j) 上货物自重油耗。

表2 参数定义与取值

参数	定义(单位)	取值
v	车辆速度(m/s)	14
φ	燃料与空气的质量比	1
s	发动机摩擦因子(kJ/r/l)	0.2
S	发动机转速(r/s)	33
V_p	p 类型车的排量(l)	[5,7,9]
η	柴油发动机的效率参数	0.9
ϵ	车辆传动系统效率	0.4
μ	柴油的热量值(kJ/g)	44
a	汽车加速度	0
θ	道路坡度	0
C_d	空气阻力系数	0.7
C_r	滚动阻力系数	0.01
A	车辆的迎风面积(m ²)	3.9
ρ	空气密度(kg/m ³)	1.2
g	重力加速度(m/s ²)	9.8
ζ	转换系数	737
e	油耗与碳排放转换系数	3.09

2 ELRHA

2.1 松弛约束

1.2所建立MIP约束条件较多且复杂,直接求解比较困难。通过分析模型结构,式(12)~(14)包含变量 w_{pijk} 、 x_{pijk} ,使两者形成耦合关系,造成问题求解困难。因此将约束(12)通过拉格朗日乘子引入目标函数形成松弛问题。

$$L(\lambda) = \min \left\{ \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_p x_{pijk} d_{ij} + \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} c_p \sum_{j=1}^N x_{p0jk} + c_e \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N e \frac{\varphi}{\mu\zeta} \left(\frac{sSV_p}{v} + \frac{\alpha W_p + \beta v^2}{1\,000\epsilon\eta} \right) d_{ij} x_{pijk} + c_e \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N e \frac{\varphi}{\mu\zeta} \cdot \frac{\alpha}{1\,000\epsilon\eta} d_{ij} w_{pijk} + \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \lambda_{pijk} (w_{pijk} - x_{pijk} Q_p) \right\} \quad (22)$$

最大化 $L(\lambda)$ 可以得到拉格朗日对偶(lagrange dual, LD)问题,如下:

$$\max_{\lambda \in [0, +\infty)} L(\lambda) = \max \left\{ \min \left\{ \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \alpha_p x_{pijk} d_{ij} + \right. \right.$$

$$\left. \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} c_p \sum_{j=1}^N x_{p0jk} + c_e \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N e \frac{\varphi}{\mu\zeta} \left(\frac{sSV_p}{v} + \frac{\alpha W_p + \beta v^2}{1\,000\epsilon\eta} \right) d_{ij} x_{pijk} + c_e \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N e \frac{\varphi}{\mu\zeta} \cdot \frac{\alpha}{1\,000\epsilon\eta} d_{ij} w_{pijk} + \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N \lambda_{pijk} (w_{pijk} - x_{pijk} Q_p) \right\} \quad (23)$$

显然,LD问题的解为原问题提供了一个下界。LD问题可以分解为子问题 Z_1 和 Z_2 。

子问题 Z_1 :

$$Z_1 = \min \left(\sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (\alpha_p d_{ij} + c_e \frac{e\varphi}{\mu\zeta} \left(\frac{sSV_p}{v} + \frac{\alpha W_p + \beta v^2}{1\,000\epsilon\eta} \right) d_{ij} - \lambda_{pijk} Q_p) x_{pijk} + \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} c_p \sum_{j=1}^N x_{p0jk} \right)$$

s. t. (6)~(11)、(15)

子问题 Z_2 :

$$Z_2 = \min \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (c_e \frac{e\varphi}{\mu\zeta} \cdot \frac{\alpha}{1\,000\epsilon\eta} d_{ij} + \lambda_{pijk}) w_{pijk}$$

s. t. 式(13)~(14)、(16)

子问题 Z_1 是关于 x_{pijk} 的子问题,可以理解为最小化车辆的综合费用,包含运输费用、固定费用、车辆自身碳排放费用;子问题 Z_2 可以理解为货物的碳排放费用。

2.2 两阶段启发式算法

上述所求拉格朗日对偶问题的解不一定是原问题的可行解。本节以拉格朗日对偶问题的解为基础,设计一种两阶段启发式算法获取原问题的高质量解。

1)一阶段算法

(1)解的转换

上述所求解为二进制编码解,不便于进行邻域搜索操作,需要转化成排序解。假设不可行解为 $x_{p0j_1k} = 1$ 、 $x_{pj_1j_2k} = 1$ 、 $x_{pj_2j_3k} = 1$ 、 $x_{pj_30k} = 1$,其表示 p 类型第 k 辆车从仓库0出发,依次服务完客户 j_1 、 j_2 、 j_3 ,再回到仓库0,则相应的排序解为 $\pi_{pk} = \{0, j_1, j_2, j_3, 0\}$,表示意义与二进制编码解相同。

(2)获取可行解

松弛解中部分车辆违反了载重约束,即部分车辆服务了超过其载重的客户点。为了获得较好的可行解,应尽量保证相邻客户点由同一辆车配送。基于这一原则,设计修复算法获取原问题可行解。算法步骤如下:

步骤① 将所求松弛解转换成排序解。

步骤② 判断所有车辆(K 辆)是否满足载重约束,若满足,执行步骤③;否则,将所有车辆分为可行车辆集 $X_{feasible}$ 和不可行车辆集 $X_{illegal}$ 。

步骤③ 将 $X_{illegal}$ 中的车辆按照载重量从小到大依次处理,按顺序摘出第1辆车中超过载重的客户组成 $\pi_{illegal}$,按顺序摘出其余车辆超过载重的客户组成 $\pi_{feasible}$;按顺序摘出 $X_{feasible}$ 中车辆服务客户并依次放入 $\pi_{feasible}$ 。

步骤④ 将 $\pi_{feasible}$ 中客户点依次插入 $\pi_{illegal}$, 以最小化路径成本为目标, 计算出最佳插入点。直至 $\pi_{feasible}$ 中客户点全部插入 $\pi_{illegal}$ 。最后输出序列整合后的客户点序 $\pi'_{illegal}$ 。

步骤⑤ 按载重量将 K 辆车从小到大依次排序, 根据第 k_1 辆车 ($k_1 = 1, 2, \dots, K$) 的载重约束, 将 $\pi'_{illegal}$ 中的客户点依次分配到该车中, 对该车进行载重最大化装车。

步骤⑥ 若 $k_1 \leq K$, 则 $k_1 = k_1 + 1$, 继续执行步骤⑤; 否则, 判断客户点是否全部分配完毕, 若分配完毕, 执行步骤⑨。

步骤⑦ 选出 K 辆车中载重量最大且剩余容量最大的车 k_2 , 将剩余客户插入车 k_2 的最后一个位置, 同时, 从该车中选出某一客户点插入车 k_3 中 ($k_3 = 1, 2, \dots, K, k_3 \neq k_2$), 使两车均满足载重约束。

步骤⑧ 若剩余客户没有分配完, 执行步骤⑦。

步骤⑨ 算法结束, 输出可行解。

2) 二阶段算法

为进一步提高可行解的质量, 本节设计了车辆间和车辆内两类共 6 种邻域搜索操作, 以对可行解进行高效细致的邻域搜索, 进一步提高可行解的质量。每种操作采用随机选取原则, 搜索操作如下:

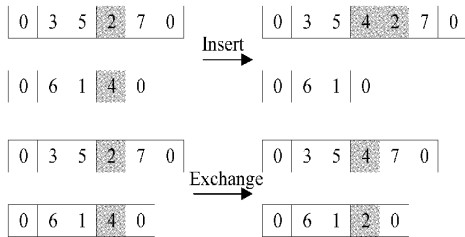


图 2 车辆间搜索策略

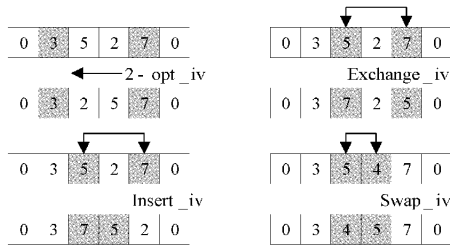


图 3 车辆内搜索策略

采用图 2、3 邻域操作对可行解进行优化, 以获取原问题近似最优解, 算法步骤如下:

步骤(1) 设可行解为 π_1 , 令当前最优解 $\pi^* = \pi_1$, 车辆总数为 K , $loop = 1, N_{co} = 1, N_{ci} = 1, N_{car} = 1$ 。

步骤(2) 在 π_1 中随机选择两辆车, 对车辆间客户执行 Insert 操作, 若不满足约束条件, 令 $\pi_1 = \pi^*$; 反之, 若获得更优解, 则将 π_1, π^* 更新为更优解, 执行步骤(4)。

步骤(3) 在 π_1 中随机选择两辆车, 对车辆间客户执行 Exchange 操作, 若不满足约束条件, 令 $\pi_1 = \pi^*$; 反之, 若获得更优解, 则将 π_1, π^* 更新为更优解。

步骤(4) $N_{co} = N_{co} + 1$, 如果 $N_{co} \leq 10K$, 执行

步骤(2), 否则, 令 $\pi_1 = \pi^*, N_{co} = 1$ 。

步骤(5) 对 π_1 中第 N_{car} 车执行 2-opt_iv 操作, 若获得更优解, 将 π_1, π^* 更新为更优解, 执行步骤(10); 否则, 令 $\pi_1 = \pi^*$ 。

步骤(6) 对 π_1 中第 N_{car} 车执行 Exchange_iv 操作, 若获得更优解, 将 π_1, π^* 更新为更优解, 执行步骤(10); 否则, 令 $\pi_1 = \pi^*$ 。

步骤(7) 对 π_1 中第 N_{car} 车执行 Insert_iv 操作, 若获得更优解, 将 π_1, π^* 更新为更优解, 执行步骤(10); 否则, 令 $\pi_1 = \pi^*$ 。

步骤(8) 对 π_1 中第 N_{car} 车执行 Swap_iv 操作, 若获得更优解, 将 π_1, π^* 更新为更优解, 执行步骤(10); 否则, 令 $\pi_1 = \pi^*$ 。

步骤(9) $N_{ci} = N_{ci} + 1$, 若 $N_{ci} \leq 20$, 执行步骤(5)。

步骤(10) 令 $N_{car} = N_{car} + 1, N_{ci} = 1$, 如果 $N_{car} \leq K$, 执行步骤(5); 否则 $loop = loop + 1, N_{car} = 1$ 。

步骤(11) 如果 $loop \leq 20$, 执行步骤(2); 否则, 输出 π^* 。

2.3 次梯度算法

本节采用次梯度法求解对偶问题, 基本步骤是根据初始化的拉格朗日乘子和问题条件求解子问题 Z_1, Z_2 , 得到决策变量 x_{pijk}, w_{pijk} , 再根据决策变量计算次梯度, 同时更新步长和拉格朗日乘子, 沿着次梯度方向迭代直至找到满足条件的对偶值。

乘子 $\lambda_{pijk} (\forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps}, \forall i \in V, \forall j \in V)$ 更新公式为:

$$\lambda_{pijk}^{n+1} = \max\{0, \lambda_{pijk}^n + C^n \cdot g_{pijk}(x^n)\} \tag{24}$$

其中, $g_{pijk}(x^n)$ 是 n 次迭代的次梯度, 计算公式为:

$$g_{pijk}(x^n) = w_{pijk} - x_{pijk} Q_p, \quad i \neq j, \forall p \in M_s, \forall k \in H_{ps}, \forall i \in V, \forall j \in V \tag{25}$$

步长更新公式为:

$$C^n = \frac{(UB - LB^n)}{\omega \sum_{p=1}^M \sum_{k=1}^{H_p} \sum_{i=0}^N \sum_{j=0}^N (g_{pijk}(x^n))^2} \tag{26}$$

其中, C^n 为 n 次迭代步长, UB 为 n 次迭代的最佳上界, LB^n 为 n 次迭代的下界, 参数 ω 值取 0.5。

2.4 算法流程

ELRHA 求解流程如图 4 所示, 算法步骤如下:

步骤 1) 初始化拉格朗日乘子 $\lambda_0 = 0$, 迭代次数 $n = 1$, 设置 UB 为原问题较大目标值。

步骤 2) 调用 Gurobi 求解器求解子问题 Z_1 和 Z_2 , 获取决策变量 x_{pijk}^n, w_{pijk}^n 和当前下界 LB^n 。

步骤 3) 运用 2.3 节所提算法对 LB^n 进行修复及优化, 若获得更优目标值, 则更新上界 UB 。

步骤 4) 根据式(24)更新拉格朗日乘子, $n = n + 1$ 。

步骤 5) 判断是否满足终止条件, 若满足, 输出 UB, LB^n ; 否则执行步骤 2)。

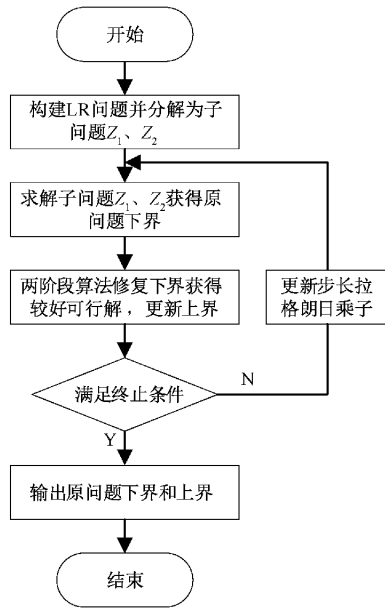


图 4 算法流程

3 实验比较与分析

本文实验算法均采用 Python3.8 编程实现,操作系统为 windows10,计算机内存为 8 G,CPU 为 Intel i5-4258U,

主频频率为 2.4 GHz。

3.1 实验算例

本文测试算例来源于网站 (<http://www.bernabe.dorrnsoro.es/vrp/>) 中 CVRP 的 Set P 数据集,由于该数据集中不含有车型数据,故在实验分析时添加车型数据(如表 3 所示),从而构成单车场多车型问题。

表 3 不同车型相关参数设置

车型列表	车型参数		
	载重/kg	车辆自重/t	固定费用/元
Type 1	90	6	200
Type 2	160	8	300
Type 3	200	10	400

3.2 与 Gurobi 求解器对比

为验证 ELRHA 的有效性,本节将 ELRHA 与全球排名领先的数学规划求解器(Gurobi)进行比较,实验结果通过上下界间隙(*Gap*)和运行时间来衡量。根据不同规模算例设置 Gurobi 最大运行时间为 1 800、3 600 和 7 200 s,设置 ELRHA 最大迭代次数为 10 次,ELRHA 在相同实验环境下独立重复运行 20 次。求解结果如表 4 所示。 $Gap = (\text{可行解} - \text{下界}) / \text{可行解} \times 100\%$ 。

表 4 不同规模问题算法对比

测试算例		ELRHA						Gurobi 求解器		
算例	车型	下界	上界			时间/s	<i>Gap</i> / %	可行解	时间/s	<i>Gap</i> / %
			最大值	最小值	平均值					
Pn16-k8*	(1,0,1)	792.453	813.674	811.894	812.339	58.9	2.45	811.894	4.3	2.39
Pn19-k2*	(0,1,1)	914.353	931.258	926.650	931.021	63.6	1.79	922.863	7.1	0.92
Pn20-k2*	(0,1,1)	921.794	947.217	939.364	940.394	62.0	1.98	938.823	8.8	1.81
Pn21-k2*	(0,1,1)	920.419	941.283	941.280	941.281	62.7	2.22	939.792	30.1	2.06
Pn22-k2*	(0,1,1)	924.733	949.189	947.195	948.529	63.8	2.51	944.595	67.1	2.10
Pn23-k8	(0,1,1)	905.510	950.858	944.626	948.248	67.1	4.51	944.626	1 800	4.14
Pn40-k5	(1,1,2)	1 728.952	1 834.369	1 819.776	1 826.189	227.3	5.32	1 894.128	1 800	8.72
Pn45-k5	(2,1,2)	1 996.196	2 110.949	2 098.222	2 101.893	768.4	5.03	2 249.926	1 800	11.28
Pn50-k10	(1,2,3)	2 479.692	2 637.605	2 624.316	2 633.158	424.5	5.83	2 750.544	3 600	9.85
Pn51-k10	(1,2,2)	2 102.637	2 249.369	2 216.812	2 232.301	1 004.4	5.81	2 281.588	3 600	7.84
Pn55-k7	(2,2,3)	2 728.822	2 897.806	2 869.546	2 883.768	654.2	5.37	3 101.202	7 200	12.01
Pn60-k10	(1,2,4)	2 981.758	3 147.175	3 118.672	3 130.093	593.6	4.74	3 557.004	7 200	16.17
Pn60-k15	(1,2,4)	2 990.171	3 185.790	3 145.698	3 159.552	619.3	5.36	3 448.211	7 200	13.28
Pn65-k10	(2,2,4)	3 259.002	3 445.647	3 418.362	3 436.296	1 038.5	5.16	3 952.990	7 200	17.56
Pn70-k10	(1,3,4)	3 379.632	3 604.594	3 577.072	3 592.168	644.1	5.92	—	7 200	—
Pn76-k5	(1,2,5)	3 518.707	3 734.575	3 703.923	3 720.918	1 345.2	5.43	—	7 200	—
Pn101-k4	(2,2,5)	3 839.350	4 156.918	4 098.121	4 123.690	2 541.4	6.90	—	7 200	—

注:表中“*”表示在规定时间内 Gurobi 能求得该规模问题的最优解,“—”表示 Gurobi 在规定时间内无法求得问题可行解。

由表 4 知,随着客户点数量和车辆数量增加,ELRHA 求解性能会逐渐优于 Gurobi,这是由于本文所研究的 GHFVRP 具有 NP 难属性,随着问题规模变大,问题解空

间呈指数增长,运用 Gurobi 求解器在相应时间往往求得问题的可行解或无法求解,求解效率不高;而 ELRHA 根据问题特点松弛问题耦合难约束,进而将问题分解成两个子

问题,降低问题求解难度,使问题容易求解,同时基于问题特点设计了修复算法和邻域操作,快速获取问题可行解并对可行解进行高效邻域搜索,能在合理时间内求取问题高质量上界和下界,为 GHFVRP 提供解的衡量标准。针对不同规模的 17 个算例,Gurobi 在规定时间内能求解 14 个算例,但无法对算例 Pn70-k10、Pn76-k5、Pn101-k4 进行有效求解,其平均 *Gap* 为 7.87%,平均求解时间为 2 965.5 s;而 ELRHA 均能对 17 个算例进行有效求解,其平均 *Gap* 为 4.49%,平均求解时间为 602.3 s,ELRHA 的平均间隙更小,求解质量更高,表明 ELRHA 的综合求解能力优于 Gurobi。

3.3 与其他算法对比

ELRHA 不仅能获取 GHFVRP 的下界,为算法的求解质量提供定量评估,同时也能求解 GHFVRP 并得到较

优解(即上界)。为进一步验证 ELRHA 的求解性能,将其与近期国外期刊中求解 VRP 的有效算法 DTS^[27] 和 ALNS^[28] 进行对比。由于 ELRHA 大部分时间用于获取问题下界,而 DTS 和 ALNS 在整个算法运行过程中均在寻找问题高质量解,因此设置 DTS 和 ALNS 的运行时间为 ELRHA 中两阶段启发式算法的运行时间,各对比算法均重复运行 20 次。

测试结果如表 5 所示,其中 ELRHA 中时间为算法求解每个算例的两阶段启发式算法时间,DTS 和 ALNS 时间为算法运行时间,每个算例下的最好结果用粗体表示。由表 5 可知,在最小值上,ELRHA、ALNS、DTS 的占优率分别为 58.8%、52.9%和 23.5%;在平均值上,ELRHA 占优率为 94.1%,ALNS、DTS 分别为 5.9%和 0。因此,ELRHA 整体性能良好,是求解 GHFVRP 的有效算法。

表 5 ELRHA 与 DTS、ALNS 的对比

测试算例		DTS			ALNS			ELRHA		
算例	车型	最小值	平均值	时间/s	最小值	平均值	时间/s	最小值	平均值	时间/s
Pn16-k8	(1,0,1)	811.907	815.471	55.1	811.894	812.956	55.0	811.894	812.339	53.3
Pn19-k2	(0,1,1)	922.863	936.737	54.1	922.863	934.945	54.0	926.650	931.021	53.5
Pn20-k2	(0,1,1)	938.823	945.920	53.1	938.823	941.379	53.0	939.364	940.394	52.1
Pn21-k2	(0,1,1)	941.285	949.133	52.1	939.792	945.758	52.0	941.280	941.281	51.8
Pn22-k2	(0,1,1)	944.595	956.805	55.1	944.595	950.972	55.0	947.195	948.529	54.8
Pn23-k8	(0,1,1)	944.626	953.505	55.2	944.626	946.901	55.0	944.626	948.248	54.9
Pn40-k5	(1,1,2)	1 829.318	1 895.062	114.3	1 794.043	1 847.677	114.0	1 819.776	1 826.189	113.7
Pn45-k5	(2,1,2)	2 177.755	2 208.966	131.5	2 099.427	2 163.882	132.3	2 098.222	2 101.893	130.5
Pn50-k10	(1,2,3)	2 678.726	2 700.419	167.6	2 599.123	2 692.192	167.0	2 624.316	2 633.158	166.1
Pn51-k10	(1,2,2)	2 288.608	2 337.467	154.4	2 217.776	2 298.634	159.2	2 216.812	2 232.301	153.5
Pn55-k7	(2,2,3)	2 915.723	2 967.055	220.8	2 872.311	2 987.390	224.0	2 869.546	2 883.768	219.4
Pn60-k10	(1,2,4)	3 201.685	3 272.827	213.4	3 120.904	3 215.115	212.0	3 118.672	3 130.093	211.9
Pn60-k15	(1,2,4)	3 318.719	3 381.040	209.8	3 139.874	3 262.830	209.0	3 145.698	3 159.552	208.9
Pn65-k10	(2,2,4)	3 595.150	3 615.669	238.7	3 431.517	3 592.386	238.0	3 418.362	3 436.296	237.6
Pn70-k10	(1,3,4)	3 712.449	3 754.961	250.0	3 590.691	3 705.492	249.0	3 577.072	3 592.168	249.0
Pn76-k5	(1,2,5)	3 843.757	3 856.245	258.4	3 714.856	3 867.430	257.0	3 703.923	3 720.918	257.0
Pn101-k4	(2,2,5)	4 352.362	4 383.353	285.2	4 249.327	4 441.427	282.0	4 098.121	4 123.690	281.6

4 结 论

本文针对 GHFVRP,考虑车辆载重、行驶距离、速度等因素,以最小化车辆固定成本、行驶成本及碳排放成本之和为优化目标,建立了 GHFVRP 的混合整数规划模型(mixed integer programming, MIP)。为求解 GHFVRP,提出了一种 ELRHA。首先,通过松弛车辆载重约束,将松弛问题分解为两个子问题,通过求解子问题获得问题下界;然后,设计修复规则对下界进行修复,得到问题的可行解;最后结合问题特点设计了 6 种邻域操作对可行解进行细致搜索,获取问题高质量解并更新上界,通过多次迭代求解获取问题的上界和下界。仿真实验验证了 ELRHA 能有效求解 GHFVRP。后续将在本文研究基础上,进一

步考虑时间窗和变速因素,并设计有效求解算法。

参考文献

- [1] DANTZIG G B, RAMSER J H. The truck dispatching problem[J]. *Management Science*, 1959, 1(6): 80-91.
- [2] 张焯炎,胡蓉,钱斌.超启发式分布估计算法求解带软时间窗的同时取送货车辆路径问题[J]. *控制理论与应用*, 2021, 38(9): 1427-1441.
- [3] 杨珍花,赖平仲,汤洋,等.冷藏车多车型混合配送调度优化[J]. *系统工程*, 2015, 33(10): 28-36.
- [4] 张森寒,安裕强,潘楠,等.面向城市商超物流配送的异构车辆调度研究[J/OL]. *昆明理工大学学报(自然科学版)*:1-9[2022-09-08]. <http://10.16112/j.cnki.53-1223/n.2022.06.482>.

- [5] 牟能冶,程驰尧,蒋尔伟,等.基于多车型多行程的城市生活垃圾分类运输路径优化[J].安全与环境学报,2022,22(4):2199-2208.
- [6] SBIHI A, EGGLESE R W. Combinatorial optimization and green logistics[J]. 4OR, 2007, 5(2): 99-116.
- [7] LENSTRA J K, KAN A H G R. Complexity of vehicle routing and scheduling problems [J]. Networks, 1981, 11(2):221-227.
- [8] 林美,何竹峰.基于云计算的物流车辆路径规划方法[J].电子测量技术,2019,42(13):153-156.
- [9] 王硕博,胡蓉,钱斌,等.改进蚁群算法求解绿色周期性车辆路径问题[J].控制工程,2022,29(9):1546-1556.
- [10] MAXIMO V R, NASCIMENTO M C V. A hybrid adaptive iterated local search with diversification control to the capacitated vehicle routing problem[J]. European Journal of Operational Research, 2021, 294(3): 1108-1119.
- [11] 何雨洁,钱斌,胡蓉.混合离散教与学算法求解复杂并行机调度问题[J].自动化学报,2020,46(4):805-819.
- [12] CHRISTIANSEN C H, LYSGAARD J. A branch-and-price algorithm for the capacitated vehicle routing problem with stochastic demands [J]. Operations Research Letters, 2009, 35(6): 773-781.
- [13] KALLEHAUGE B, LARSEN J, MADSEN O. Lagrangian duality applied to the vehicle routing problem with time windows [J]. Computers and Operations Research, 2006, 33(5): 1464-1487.
- [14] PESSOA A, SADYKOV R, UCHOA E. Enhanced branch-cut-and-price algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problems [J]. European Journal of Operational Research, 2018, 270(2): 530-543.
- [15] CHOI E, TCHA D W. A column generation approach to the heterogeneous fleet vehicle routing problem[J]. Computers & Operations Research, 2007, 34(7): 2080-2095.
- [16] BOUZID M C, HADDADENE H A, SALHI S. An integration of lagrangian split and VNS: The case of the capacitated vehicle routing problem[J]. Computers & Operations Research, 2017, 78: 513-525. DOI: 10.1016/j.cor.2016.02.009.
- [17] IMAI A, NISHIMURA E, CURRENT J. A Lagrangian relaxation-based heuristic for the vehicle routing with full container load[J]. European Journal of Operational Research, 2007, 176(1): 87-105.
- [18] QIU Y, QIAO J, PARDALOS P M. A branch-and-price algorithm for production routing problems with carbon cap-and-trade[J]. Omega, 2017, 68, 49-61.
- [19] ÇACRI, KOÇ, ISMAIL. The green vehicle routing problem: A heuristic based exact solution approach[J]. Applied Soft Computing, 2016, 39: 154-164.
- [20] BEHNKE M, KIRSCHSTEIN T, BIERWIRTH C. A column generation approach for an emission-oriented vehicle routing problem on a multigraph[J]. European Journal of Operational Research, 2021, 288(3): 794-809.
- [21] SHEN QN, CHU F, CHEN HX. A Lagrangian relaxation approach for a multi-mode inventory routing problem with transshipment in crude oil transportation[J]. Computers & Chemical Engineering, 2011, 35(10):2113-2123.
- [22] LI JQ, MIRCHANDANI PB, BORENSTEIN D. A Lagrangian heuristic for the real-time vehicle rescheduling problem[J]. Transportation Research Part E, 2009, 45(3):419-433.
- [23] LIN B, GHADDAR B, NATHWANI J. Electric vehicle routing with charging/discharging under time-variant electricity prices[J]. Transportation Research Part C: Emerging Technologies, 2021, 130. DOI: 10.1016/j.trc.2021.103285.
- [24] 谢杏子,王秀丽.单机订单接受与加工调度问题的拉格朗日松弛算法[J].系统管理学报,2020,29(5): 874-881.
- [25] BARTH M, BORIBOONSOMSIN K. Real-world carbon dioxide impacts of traffic congestion [J]. Transportation Research Record. 2008; 2058(1): 163-171.
- [26] FRANCESCHETTI A, HONHON D, WOENSEL T V, et al. The time-dependent pollution-routing problem[J]. Transportation Research Part B, 2013, 56(56): 265-293.
- [27] MELIANI Y, HANI Y, ELHAQ SL, et al. A developed tabu search algorithm for heterogeneous fleet vehicle routing problem[J]. IFAC PapersOnLine, 2019,52(13): 1051-1056.
- [28] YU ZX, ZHANG P, YU Y, et al. An adaptive large neighborhood search for the larger-scale instances of green vehicle routing problem with time windows[J]. Complexity,2020. DOI:10.1155/2020/8210630.

作者简介

徐林浩,硕士研究生,主要研究方向为复杂系统智能化研究。

E-mail:2630065160@qq.com

胡蓉(通信作者),副教授,主要研究方向为物流和生产过程优化调度。

E-mail:ronghu@vip.163.com

钱斌,博士,教授,主要研究方向为智能优化调度理论与方法研究。

于乃康,博士,主要研究方向为数学规划研究。

E-mail:240004982@qq.com