

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2210512

# 基于低秩逼近的无线传感网定位算法<sup>\*</sup>

诸一琦<sup>1</sup> 诸燕平<sup>2</sup> 张景林<sup>2</sup> 陈瑞<sup>2</sup>

(1.江苏理工学院电气信息工程学院 常州 213001; 2.常州大学微电子与控制工程学院 常州 213164)

**摘要:** 为了提高传感网节点定位精度并降低运算量,提出一种新的基于低秩逼近的定位算法。算法首先获取邻居节点间距离测量值,然后填充欧氏距离矩阵,最后通过对锚节点坐标进行刚性变换得到未知节点坐标。为了更准确地填充距离矩阵,根据格拉姆矩阵的低秩特性将定位问题转化为半定规划问题,并在定位模型中引入正则化项来避免填充欧氏距离矩阵时的退化解问题。针对半定规划求解复杂度高的缺点,采用交替方向乘子法来更快地求解。通过仿真实验对比,在大噪声情况下,本算法相较于传统算法(包括多维缩放法和其他欧式距离填充算法),均方根误差减小28.2%~46.6%,重建误差减小18.4%~64.5%;计算时间仅需SDP算法的7%。

**关键词:** 欧氏距离矩阵;低秩;半定规划;交替方向乘子法

**中图分类号:** TP393 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.5015

## Sensor network localization using low-rank approximation

Zhu Yiqi<sup>1</sup> Zhu Yanping<sup>2</sup> Zhang Jinglin<sup>2</sup> Chen Rui<sup>2</sup>

(1. School of Electrical and Information Engineering, Jiangsu University of Technology, Changzhou 213001, China;  
2. School of Microelectronics and Control Engineering, Changzhou University, Changzhou 213164, China)

**Abstract:** To improve the localization accuracy of sensor network nodes and reduce the computational workload, a novel algorithm based on low-rank approximation was proposed. Given distance measurements obtained between sensors in the neighborhood, the proposed algorithm first fulfilled the Euclidean distance matrix (EDM) completion. Then, sensors' positions were obtained by rigid transformation using anchors' positions. To achieve accurate range information, the EDM completion stage exploited the low-rank essence of the Gram matrix of sensors' coordinate matrix, resulting in a semidefinite programming (SDP) problem. Furthermore, some regularization term was introduced in our localization model to avoid degenerate solutions in the EDM completion stage. In practice, solving a large-scale SDP problem is still a challenging task. To improve the scalability of the proposed algorithm, an alternating direction method of multipliers (ADMM) was further developed. Compared with traditional algorithms (including multidimensional scaling method and other Euclidean distance-filling algorithms), this algorithm reduces the root mean square error by 28.2%~46.6% and the reconstruction error by 18.4%~64.5% in the case of large noise through simulation experiments, and the computation time is only 7% of that of SDP algorithm.

**Keywords:** Euclidean distance matrix (EDM); low-rank; semidefinite programming (SDP); alternating direction method of multipliers (ADMM)

### 0 引言

近年来无线传感网在环境监测、目标跟踪、制造物流等领域得到了广泛的应用<sup>[1]</sup>。这些应用大多需要提供传感器节点的位置信息,但对拥有大量节点的传感网来说,每个节点都配备定位设备(例如北斗卫星导航系统)成本太高,而且传感网一般采用批量随机的方式进行部署,因此基于

物理测量值或连通信息的节点自身定位技术一直是传感网的研究热点之一。

传感器网络定位算法可以分为两类:基于非测距的(range-free)和基于测距的(range-based)<sup>[2-3]</sup>。基于非测距的定位算法通常仅利用节点的连通性信息来估算位置坐标<sup>[4]</sup>,对节点的硬件要求低;基于测距的定位往往需采集测距信息,并通过不同模型估算未知节点坐标值<sup>[5-7]</sup>,所以定

收稿日期:2022-06-28

<sup>\*</sup> 基金项目:江苏省重点研发专项资金(现代农业)项目(BE2019317)、国家自然科学基金青年科学基金(61801055)项目资助

位精度较高,但是对节点的硬件要求也更高。

基于测距的传感网节点定位算法中首先需要构建欧式距离矩阵(Euclidean distance matrix, EDM),矩阵元素为每对节点间的距离平方值,当通过测距部分矩阵元素已知后,基于 EDM 的定位算法可以分为两个阶段:第 1 阶段,根据锚节点坐标值,采用 EDM 填充算法<sup>[6-7]</sup>估计未知坐标值;第 2 阶段,基于多维尺度(multidimensional scaling, MDS)算法<sup>[8]</sup>得到节点相对坐标,然后利用锚节点坐标获得未知节点的全局位置。显然,第一阶段的 EDM 填充结果对最终定位精度影响较大,且计算复杂度对整个定位时间影响较大。Biswas 等<sup>[9]</sup>提出了半定规划(semidefinite programming, SDP)算法,通过将原始低秩格拉姆(Gram)矩阵松弛为一个半正定矩阵来补全 EDM 矩阵。Wang 等<sup>[10]</sup>通过将 SDP 约束矩阵分割成更小的矩阵,以降低算法复杂度。Kumar<sup>[11]</sup>等也提出使用二阶锥规划(second order cone programming, SOCP)松弛约束条件来降低运算量。文献[12-13]则是首先最小化 EDM 的秩,然后利用核范式简化求解过程,最后基于 EDM 与 Gram 矩阵的关系使用 MDS 算法得到节点相对坐标。文献[14]全面分析了求解时 EDM 的特性。文献[15-16]充分考虑 Gram 矩阵性质后,将定位问题转变为一个 SDP 松弛问题再求解。文献[17-18]提出了多种基于 EDM 填充的传感网定位算法,并将 Gram 矩阵特性用于细化节点定位模型。

虽然上述文献已充分考虑了 EDM 和 Gram 矩阵的性质,仍会由于求解时出现退化解,而导致定位精度不佳。因此本文提出一种新的算法模型,基于 Gram 矩阵的低秩特性和引入正则项,将优化问题转化为一个 SDP 问题,同时避免退化解。并针对 SDP 求解通用数值方法(例如内点法)计算量过大的问题,采用交替方向乘子法(alternating direction method of multipliers, ADMM)<sup>[19]</sup>来提高解算速度,提高算法的可扩展性。

论文安排如下:第一部分构建定位问题的数学模型,第二部分提出基于 ADMM 的分布式算法,第三部分通过仿真结果验证定位算法的性能,最后给出了结论。

## 1 定位算法模型

### 1.1 Gram 矩阵

假定传感网有  $N$  个节点,坐标为  $\mathbf{x}_i \in R^d (i = 1, \dots, N)$ ,所有节点坐标集合为  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^N$ 。锚节点坐标已知,用  $\{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^M$  表示,通常  $M \ll N$ 。节点坐标矩阵可以表示为  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \dots \ \mathbf{x}_N] \in R^{d \times N}$ ,它的 Gram 矩阵  $\mathbf{G}$  定义为:

$$\mathbf{G} = (\mathbf{X} - \mathbf{x}_c \cdot \mathbf{1}^T)(\mathbf{X} - \mathbf{x}_c \cdot \mathbf{1}^T) \quad (1)$$

其中,  $\mathbf{x}_c = \frac{1}{N} \mathbf{X} \cdot \mathbf{1}$  表示传感器坐标中心,  $\mathbf{1}$  为元素全为 1 的列向量。式(1)表明  $\mathbf{G}$  的最大秩为  $d$ 。当节点足够多时(即  $N \geq d$ ),  $\mathbf{G}$  为低秩矩阵。

基于物理测量方法,可以获得一对传感器节点间的距

离估计量  $d_{ij} = \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 = \sqrt{(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)^T(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j)}$ ,然后构建 EDM,即  $\mathbf{D} = [d_{ij}^2]$ 。矩阵  $\mathbf{D}$  和  $\mathbf{G}$  可以通过线性运算符  $K$  联系在一起:

$$K(\mathbf{D}) = -\frac{1}{2} \mathbf{J} \mathbf{D} \mathbf{J} \quad (2)$$

其中,  $\mathbf{J} = \mathbf{V} \mathbf{V}^T$ ,  $\mathbf{V} \in R^{N \times (N-1)}$  中各列满足正交特性  $\mathbf{V}^T \mathbf{V} = \mathbf{I}$ 。可以证得,当且仅当存在矩阵  $\mathbf{J}$  使得  $\mathbf{G} = K(\mathbf{D})$  成立,  $\mathbf{D}$  才是一个 EDM<sup>[6-7]</sup>。如果给定  $\mathbf{G}$ ,则 EDM 可以通过式(3)计算所得:

$$M(\mathbf{G}) = \text{Diag}\{\mathbf{G}\} \cdot \mathbf{1}^T + \mathbf{1} \cdot \text{Diag}\{\mathbf{G}\}^T - 2\mathbf{G} \quad (3)$$

其中,  $\text{Diag}\{\cdot\}$  返回一个由对称矩阵的对角线元素组成的向量。可以证得,如果  $\mathbf{G}$  是半正定的,式(3)使得  $M(\mathbf{G})$  对角元素为 0,非对角元素为非负。

### 1.2 定位模型

实际传感网定位问题中,由于节点通信半径的限制,无法获得完整的  $\mathbf{D}$ 。此外,对于不同的  $\mathbf{J}$ ,所得的  $\mathbf{G}$  并不相同。为了消除这一模糊现象,本算法选取  $\mathbf{J} = \mathbf{I} - \frac{1}{N} \mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T$ 。在此基础之上,传感网定位问题可以表示为:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{G} \succeq 0, \mathbf{D}} \quad & \text{Tr}\{\mathbf{G}\} + \alpha \|\mathbf{W} \circ [\mathbf{A} - \mathbf{D}]\|_F^2 - \beta \|\overline{\mathbf{W}} \circ \mathbf{D}\|_1 \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{G} = K(\mathbf{D}) \\ & \mathbf{D} = M(\mathbf{G}) \end{aligned} \quad (4)$$

式中:运算符  $\text{Tr}\{\cdot\}$  为求矩阵的迹,  $\circ$  表示哈达玛乘积,  $\|\cdot\|_F$  为求矩阵的 Frobenius 范数。矩阵  $\mathbf{A}$  包含所有已测得的距离平方值和需填充的未知距离测量值,权重系数矩阵  $\mathbf{W}$  和  $\overline{\mathbf{W}}$  定义分别为:

$$\begin{aligned} \mathbf{W}_{ij} &= \begin{cases} 1, & \forall (i, j) \in N_e \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \\ \overline{\mathbf{W}}_{ij} &= \begin{cases} 1, & \forall (i, j) \in \overline{N_e} \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{aligned} \quad (5)$$

其中,  $N_e$  为邻节点集合,  $\overline{N_e}$  则为其补集。式(4)中的范数  $\|\cdot\|_1$  定义为  $\|\mathbf{Z}\|_1 = \sum_j \sum_i Z_{ij}$ ,第 1 项考虑了 Gram 矩阵的低秩性,由于最小化矩阵秩时计算量很大,因此以凸松弛项  $\text{Tr}\{\mathbf{G}\}$  代替;第 2 项用以衡量已知节点距离与估计量间的误差;第 3 项用以扩大非邻居节点间的距离估计,本算法引入这一项主要考虑到实际应用中的退化解情形。

### 1.3 节点坐标求解方法

由于(4)式中的第 2、3 项仅涉及  $\mathbf{D}$  的非对角元素并最小化,目的是将非对角线元素值推向正值,从而形成有效的 EDM 矩阵,因此可以通过忽略约束条件  $\mathbf{D} = M(\mathbf{G})$  从而获得简化的定位问题:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{G} \succeq 0, \mathbf{D} \in R^N} \quad & \text{Tr}\{\mathbf{G}\} + \alpha \|\mathbf{W} \circ [\mathbf{A} - \mathbf{D}]\|_F^2 - \beta \|\overline{\mathbf{W}} \circ \mathbf{D}\|_1 \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{G} = K(\mathbf{D}) \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $K^N$  表示具有零对角线的所有  $N \times N$  对称矩阵的集合。

假设  $\mathbf{G}^*$  是式(4)的最优解,对  $\mathbf{G}^*$  做特征值分解得到  $\mathbf{G}^* = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{U}^T$ , 其中  $\mathbf{\Sigma}$  是由  $\mathbf{G}^*$  的特征值组成的对角矩阵,即  $\mathbf{\Sigma} = \text{diag}\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_N\}$ 。不失一般性,假设特征值  $\{\lambda_i\}_{i=1}^N$  按非递减顺序排列,即  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N \geq 0$ , 此时传感器节点的相对坐标为:

$$\tilde{\mathbf{X}} = \text{diag}\{\sqrt{\lambda_1}, \sqrt{\lambda_2}, \dots, \sqrt{\lambda_d}\} \mathbf{U}_d^T \quad (7)$$

其中,  $\mathbf{U}_d \in R^{N \times d}$  是由  $d$  个最大特征值  $\{\lambda_i\}_{i=1}^d$  对应的特征向量组成。为了得到节点的全局坐标,可以对锚节点坐标(即  $\tilde{\mathbf{X}}$  矩阵的前  $M$  行)进一步使用刚性变换<sup>[6]</sup>来确保在变换之后保留每对节点之间的距离。

## 2 ADMM 算法

### 2.1 更新矩阵的构造与优化

式(6)是一个半定规划问题,对于小规模节点定位问题,可以通过各种数值算法有效求得最优解。然而当网络中存在大量节点时,想通过数值算法直接求解式(6)则会导致计算量很大,因此提出基于 ADMM 的节点定位算法。

首先通过引入辅助变量  $\mathbf{B}$  将式(6)转化为:

$$\begin{aligned} \text{minimize} \quad & \text{Tr}\{\mathbf{G}\} + \alpha \|\mathbf{W} \circ (\mathbf{A} - \mathbf{D})\|_F^2 - \beta \|\bar{\mathbf{W}} \circ \mathbf{D}\|_1 \\ & \mathbf{G} = \mathbf{K}(\mathbf{B}) \\ & \mathbf{D} = \mathbf{B} \end{aligned} \quad (8)$$

基于上述模型构建增广拉格朗日函数为:

$$\begin{aligned} L_\rho(\mathbf{G}, \mathbf{B}, \mathbf{D}, \mathbf{\Gamma}, \mathbf{\Theta}) = & \text{Tr}\{\mathbf{G}\} + \\ & \alpha \|\mathbf{W} \circ (\mathbf{A} - \mathbf{D})\|_F^2 - \beta \|\bar{\mathbf{W}} \circ \mathbf{D}\|_1 + \\ & \text{Tr}\left\{\mathbf{\Gamma}^T \left(\mathbf{G} + \frac{1}{2}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{J}\right)\right\} + \text{Tr}\{\mathbf{\Theta}^T (\mathbf{D} - \mathbf{B})\} + \\ & \frac{\rho}{2} \|\mathbf{G} + \frac{1}{2}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{J}\|_F^2 + \frac{\rho}{2} \|\mathbf{D} - \mathbf{B}\|_F^2 \end{aligned} \quad (9)$$

由于 ADMM 算法需要交替地更新矩阵  $\mathbf{G}$ 、 $\mathbf{D}$ 、 $\mathbf{B}$  和乘法器  $\mathbf{\Gamma}$ 、 $\mathbf{\Theta}$ 、 $\rho$ , 构建更新公式为:

$$\mathbf{G}^{(k+1)} = \underset{\mathbf{G} \succeq 0}{\text{argmin}} \left\{ \text{Tr}\{\mathbf{G}\} + \frac{\rho^{(k)}}{2} \|\mathbf{G} + \frac{1}{2}\mathbf{J}\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{J} + \frac{1}{\rho^{(k)}}\mathbf{\Gamma}^{(k)}\|_F^2 \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(k+1)} = & \underset{\mathbf{B}}{\text{argmin}} \left\{ \|\frac{1}{2}\mathbf{J}\mathbf{B}\mathbf{J} + \mathbf{G}^{(k+1)} + \frac{1}{\rho^{(k)}}\mathbf{\Gamma}^{(k)}\|_F^2 + \right. \\ & \left. \|\mathbf{B} - \mathbf{D}^{(k)} - \frac{1}{\rho^{(k)}}\mathbf{\Theta}^{(k)}\|_F^2 \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\mathbf{D}^{(k+1)} = \underset{\mathbf{D} \in K^N}{\text{argmin}} \left\{ \alpha \|\mathbf{W} \circ (\mathbf{A} - \mathbf{D})\|_F^2 - \beta \|\bar{\mathbf{W}} \circ \mathbf{D}\|_1 + \frac{\rho^{(k)}}{2} \|\mathbf{D} - \mathbf{B}^{(k+1)} + \frac{1}{\rho^{(k)}}\mathbf{\Theta}^{(k)}\|_F^2 \right\} \quad (12)$$

$$\mathbf{\Gamma}^{(k+1)} = \mathbf{\Gamma}^{(k)} + \rho^{(k)} \left( \mathbf{G}^{(k+1)} + \frac{1}{2}\mathbf{J}\mathbf{B}^{(k+1)}\mathbf{J} \right) \quad (13)$$

$$\mathbf{\Theta}^{(k+1)} = \mathbf{\Theta}^{(k)} + \rho^{(k)} (\mathbf{D}^{(k+1)} - \mathbf{B}^{(k+1)}) \quad (14)$$

$$\rho^{(k+1)} = \eta \rho^{(k)} \quad (15)$$

为求得闭合解,进一步将式(10)中的目标函数改写为

$$\|\mathbf{G} + \frac{1}{2}\mathbf{J}\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{J} + \frac{1}{\rho^{(k)}}[\mathbf{\Gamma}^{(k)} + \mathbf{I}]\|_F^2, \text{再最小化从而得到最优解:}$$

$$\mathbf{G}^{(k+1)} = \Phi_+ \left( -\frac{1}{2}\mathbf{J}\mathbf{B}^{(k)}\mathbf{J} - \frac{1}{\rho^{(k)}}(\mathbf{\Gamma}^{(k)} + \mathbf{I}) \right) \quad (16)$$

$$\Phi_+(\mathbf{Z}) = \mathbf{H} \cdot \text{diag}\{\max(\sigma_1, 0), \dots, \max(\sigma_N, 0)\} \cdot \mathbf{H}^T \quad (17)$$

其中,  $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$  是对称矩阵  $\mathbf{Z}$  的特征值,  $\mathbf{H}$  的第  $i$  列是与  $\{\sigma_i\}_{i=1}^N$  所对应的特征向量。

为了求得式(11)的最优解,假设矩阵  $\mathbf{J}$  的特征值分解是  $\mathbf{J} = \mathbf{P}\mathbf{\Lambda}\mathbf{P}^T$ , 则式(11)目标函数可以重新表述为:

$$\begin{aligned} F(\mathbf{Q}; \tilde{\mathbf{G}}(k+1), \tilde{\mathbf{D}}(k)) = & \|\frac{1}{2}\mathbf{\Lambda}\mathbf{Q}\mathbf{\Lambda} + \tilde{\mathbf{G}}(k+1)\|_F^2 + \\ & \|\mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{D}}(k)\|_F^2 \end{aligned} \quad (18)$$

其中,

$$\mathbf{Q} = \mathbf{P}^T \mathbf{B} \mathbf{P} \quad (19)$$

$$\tilde{\mathbf{G}}(k+1) = \mathbf{P}^T (\mathbf{G}^{(k+1)} + \frac{1}{\rho^{(k)}}\mathbf{\Gamma}^{(k)}) \mathbf{P} \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{D}}(k) = \mathbf{P}^T (\mathbf{D}^{(k)} + \frac{1}{\rho^{(k)}}\mathbf{\Theta}^{(k)}) \mathbf{P} \quad (21)$$

对于  $\mathbf{J} = \mathbf{I} - \frac{1}{N}\mathbf{1} \cdot \mathbf{1}^T$ , 对角矩阵  $\mathbf{\Lambda}$  可分块为  $\mathbf{\Lambda} =$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^T & 0 \end{bmatrix}. \text{GOTOBUTTON(18)式可以进一步化简为:}$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{Q}; \tilde{\mathbf{G}}(k+1), \tilde{\mathbf{D}}(k)) = & \|\frac{1}{2}\bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{G}}^{(k+1)}\|_F^2 + \\ & \|\mathbf{Q} - \tilde{\mathbf{D}}(k)\|_F^2 + \text{常数} \end{aligned} \quad (22)$$

其中,  $\bar{\mathbf{P}} \in R^{N \times (N-1)}$  为  $\mathbf{P}$  的前  $N-1$  列组成的子矩阵,

$$\bar{\mathbf{Q}}$$
 和  $\bar{\mathbf{G}}^{(k+1)}$  定义为  $\bar{\mathbf{Q}} = \bar{\mathbf{P}}^T \mathbf{B} \bar{\mathbf{P}}, \bar{\mathbf{G}}^{(k+1)} = \bar{\mathbf{P}}^T (\mathbf{G}^{(k+1)} + \frac{1}{\rho^{(k)}}\mathbf{\Gamma}^{(k)})$

$\bar{\mathbf{P}}$ 。它们分别是  $\mathbf{Q}$  和  $\tilde{\mathbf{G}}(k+1)$  的子矩阵。由于式(22)中只有右边的第 2 项包括  $\mathbf{Q}$  的元素  $\{Q_{i,N}\}_{i=1}^N$  或  $\{Q_{N,i}\}_{i=1}^N$ , 因此可得:

$$Q_{i,N}^{(k+1)} = Q_{N,i}^{(k+1)} = \tilde{D}_{i,N}^{(k)} \quad (23)$$

求解时,还需最小化:

$$\|\frac{1}{2}\bar{\mathbf{Q}} + \bar{\mathbf{G}}^{(k+1)}\|_F^2 + \|\bar{\mathbf{Q}} - \bar{\mathbf{D}}^{(k)}\|_F^2 \quad (24)$$

其中,  $\bar{\mathbf{D}}^{(k)} = \bar{\mathbf{P}}^T (\mathbf{D}^{(k)} + \frac{1}{\rho^{(k)}}\mathbf{\Theta}^{(k)}) \bar{\mathbf{P}}$ , 实质上需对  $\bar{\mathbf{Q}}$  的每个元素都做最小化:

$$\min_{Q_{ij}} \left( \frac{1}{2}Q_{ij} + \tilde{G}_{ij}^{(k+1)} \right)^2 + (Q_{ij} - \tilde{D}_{ij}^{(k)})^2 \quad (25)$$

式(25)的最优解为:

$$Q_{ij}^{(k+1)} = \frac{2}{5} (2\tilde{D}_{ij}^{(k)} - \tilde{G}_{ij}^{(k+1)}) \quad (26)$$

一旦  $\mathbf{Q}^{(k+1)}$  值确定后,式(11)的最优解  $\mathbf{B}^{(k+1)}$  可以通过式(27)计算得到:

$$\mathbf{B}^{(k+1)} = \mathbf{P}\mathbf{Q}^{(k+1)}\mathbf{P}^T \quad (27)$$

通过分析发现,式(12)的目标函数基本上是可分离的,并且可以在  $\mathbf{D}$  的每个元素  $D_{ij}$  上进行优化。具体来说,当  $\forall (i, j) \in N_e$  且  $i \neq j$  时,可将优化问题化简为:

$$\min_{D_{ij}} \alpha (A_{ij} - D_{ij})^2 + \frac{\rho^{(k)}}{2} \left( D_{ij} - B_{ij}^{(k-1)} + \frac{1}{\rho^{(k)}} \Theta_{ij}^{(k)} \right)^2 \quad (28)$$

此时闭合解为:

$$D_{ij}^{(k+1)} = \frac{2\alpha A_{ij} + \rho^{(k)} \left[ B_{ij}^{(k-1)} - \frac{1}{\rho^{(k)}} \Theta_{ij}^{(k)} \right]}{2\alpha + \rho^{(k)}} \quad (29)$$

当  $\forall (i, j) \in \bar{N}_e$  且  $i \neq j$  时,优化问题化简为:

$$\min_{D_{ij}} -\beta D_{ij} + \frac{\rho^{(k)}}{2} \left( D_{ij} - B_{ij}^{(k-1)} + \frac{1}{\rho^{(k)}} \Theta_{ij}^{(k)} \right)^2 \quad (30)$$

此时闭合解为:

$$D_{ij}^{(k+1)} = \frac{\beta - \Theta_{ij}^{(k)}}{\rho^{(k)}} + B_{ij}^{(k-1)} \quad (31)$$

如果  $i = j$ , 则闭合解为  $D_{ij}^{(k+1)} = 0$ 。

## 2.2 更新持续条件和参数设置

ADMM 快速算法参考了 MDS 算法<sup>[8]</sup>用最短路径距离来填充初始  $\mathbf{D}^0$  和  $\mathbf{B}^0$  矩阵的缺少项,得到  $\mathbf{B}^0$  后再通过  $K(\mathbf{B}^0)$  来计算出初始 Gram 矩阵  $\mathbf{G}^0$ 。ADMM 算法的更新过程会持续到满足条件  $\frac{\|\mathbf{G}^{(k+1)} - \mathbf{G}^{(k)}\|_F}{\|\mathbf{G}^{(k)}\|_F} \leq \epsilon$  且  $\|\mathbf{D}^{(k+1)} - \mathbf{B}^{(k+1)}\|_F \leq \epsilon$  为止。

参数设置方面,式(6)中的正则化参数  $\alpha$  和  $\beta$  用来控制估计误差和消除退化解。一般来说,  $\alpha$  初始值要足够大来保证重建 EDM 的精度,而  $\beta$  值不能过大,否则会导致整个网络拓扑出错。

## 3 实验结果

### 3.1 退化解问题分析

首先通过一个实验来对比式(4)是否含有第 3 项的定位结果(如图 1 所示)。实验在正方形区域的每个角落各布置了 1 个节点,假设每个节点只能与其他 2 个临近角落的节点通信。

第 1 种方案:验证当式(4)不含第 3 项时的定位结果。假设测距是理想的,即测量噪声  $\beta = 0$ , 此时第 3 项为 0。图 1 中用菱形表示在求解式(4)出现的退化解,实验结果发现因为非邻域内的节点相互重叠,所以导致解退化为一个秩为 1 的 Gram 矩阵。

第 2 种方案:在  $\beta$  为正值时(含第三项)求解式(4),可得真正秩为 2 的解(图 1 中用加号表示)。

此两种解决方案皆可以实现 EDM 的无偏估计(即目标函数第 2 项为 0),但如果式(4)中缺少第 3 项,退化解会导致目标函数值较低。

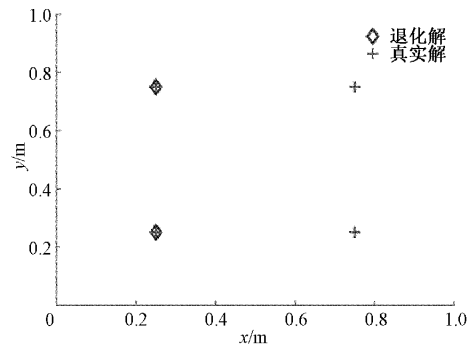


图 1 第 3 项正定项对定位结果的影响

### 3.2 算法性能分析

通过两组仿真实验来评估算法的定位性能。假设节点随机分布于  $100\text{ m} \times 100\text{ m}$  的正方形区域,每个传感器节点只能与其通信范围  $R$  内的邻居节点通信。距离测量噪声模型<sup>[20]</sup>为:

$$d_{ij} = \bar{d}_{ij} \cdot \max\{0, 1 + \sigma_d \times N(0, 1)\} \quad (32)$$

其中,  $\bar{d}_{ij}$  是节点  $i$  与  $j$  之间的真实距离,  $\sigma_d$  是噪声因子,  $N(0, 1)$  为  $(0, 1)$  范围内的标准正态分布随机变量。采用均方根误差 (root mean-square error, RMSE) 作为性能指标来评估算法性能:

$$e_{\text{RMSE}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \|\hat{\mathbf{X}} - \mathbf{X}\|_F \quad (33)$$

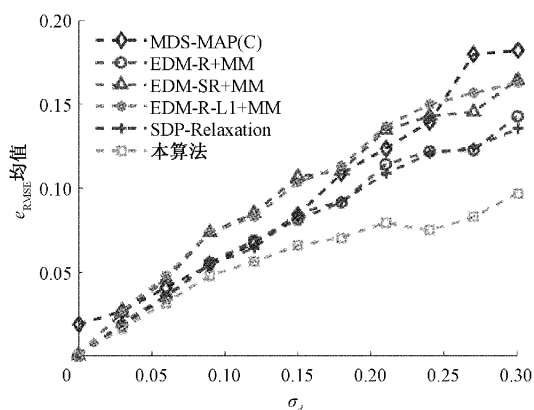
其中,  $\hat{\mathbf{X}} \in \mathbf{R}^{d \times N}$  和  $\mathbf{X} \in \mathbf{R}^{d \times N}$  分别代表传感器重建和真实坐标矩阵。对于文中所有基于 EDM 的算法, EDM 重建误差  $e_{\text{EDM}}$  为:

$$e_{\text{EDM}} = \sqrt{\frac{1}{|\epsilon|} \sum_{(i, j) \in \epsilon} (\hat{D}_{ij} - D_{ij})^2} \quad (34)$$

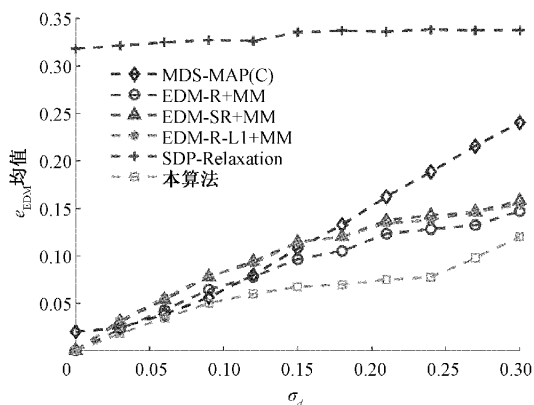
其中,  $\epsilon = \{(i, j) \mid i < j, i, j = 1, 2, \dots, N\}$ ,  $\hat{D}_{ij}$  和  $D_{ij}$  分别是传感器  $i$  和  $j$  的重建和真实节点间距离。由于 EDM 是对称矩阵并且对角线上有 0 元素,因此  $e_{\text{EDM}}$  由 EDM 上三角部分的所有非对角线元素计算得到。在验证过程中,首先将  $\rho$  和  $\eta$  分别初始化为 0.1 和 1.01,并将迭代终止条件参数  $\epsilon$  设置为  $10^{-6}$ 。

实验 1: 25 个传感器节点均匀分布在正方形区域中,选择其中任意 5 个为锚节点,并假设其他节点已获知锚节点坐标,所有节点的通信距离  $R$  都设为 60 m。实验对比了本算法、MDS-MAP(C)<sup>[8]</sup>、SDP-Relaxation<sup>[14]</sup>、EDM-SR<sup>[17]</sup>、EDM-R<sup>[17]</sup> 和 EDM-R- $l_1$ <sup>[17]</sup> 算法的  $e_{\text{RMSE}}$  值随  $\sigma_d$  的变化情况,如图 2(a)所示。噪声因子  $\sigma_d$  的变化范围为  $0 \sim 0.3$ , 对不同的  $\sigma_d$  值都分别进行了 200 次蒙特卡罗实验并对实验结果求均值得到  $e_{\text{RMSE}}$ , 实验中  $\beta$  始终设为 0.05。当  $\sigma_d$  变大时,距离测量值受到噪声的影响也将更大,因此式(6)第 2 项上的正则化变换参数  $\alpha$  应随着  $\sigma_d$  的增大而减小,基于这个原则,令  $\alpha = 10^{3-10\sigma_d}$ 。上述实验中所有的 SDP 问题都通过 MATLAB 平台的 SeDuMi 工具箱求解。实验结果

表明,随着  $\sigma_d$  的增大,所有算法的定位精度都在逐渐变差。如图 2(a)所示,本算法性能最佳,尤其当  $\sigma_d$  足够大时(例如  $\sigma_d > 0.12$ )本算法定位精度明显优于其他算法。由于实验中所有算法都首先需要重建 EDM,再用 EDM 来估计传感器节点的坐标,因此本文也对所有算法的  $e_{EDM}$  均值进行了对比,如图 2(b)所示。当  $\sigma_d$  足够大时(在本次仿真中  $\sigma_d > 0.12$ ),本算法的  $e_{EDM}$  比其他定位方法低得多。



(a) 均方根误差变化情况

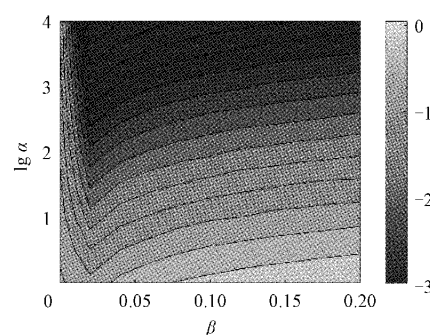


(b) 重建误差变化情况

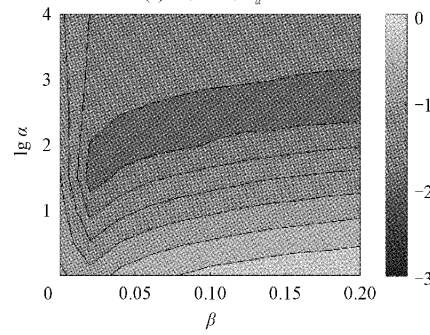
图 2 误差分析

实验 2:为了进一步评估本算法的定位精度,假设在实验区域均匀分布 100 个未知传感器节点和 10 个锚节点,通信距离  $R$  都是 40 m。本次仿真实验噪声因子  $\sigma_d$  的变化范围为  $0 \sim 0.2$ 。对每个  $\sigma_d$ ,  $\alpha$  变化范围为  $1 \sim 10^4$ ,  $\beta$  变化范围为  $0 \sim 0.2$ 。对每组  $(\sigma_d, \alpha, \beta)$  做 200 次独立的蒙特卡罗仿真实验后对  $e_{RMSE}$  均值取对数。图 3 所示为当  $\sigma_d$  取 0、0.1 和 0.2 时  $e_{RMSE}$  相对于  $\alpha$  和  $\beta$  的变化。可以观察到参数  $\beta$  在算法中起到重要的作用:如果  $\beta$  过小,退化解将导致算法无法精确定位;而当  $\beta$  足够大时(例如  $\beta > 0.03$ ),  $\alpha$  值需合理选择,即当噪声很小时,  $\alpha$  值必须相应减小,以免距离估计误差  $\|W \cdot [A - D]\|_F^2$  导致惩罚项过度。

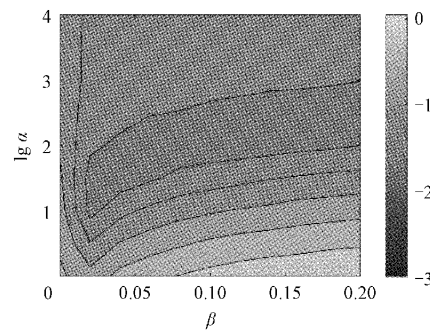
实验 3:为了评估算法的计算效率,假设在一个正方形区域随机分布 20~70 个节点和 5 个锚节点组成无线传感网,并在理想情况下测距,即  $\sigma_d = 0$ 。随着传感器数量的增



(a) 噪声因子  $\sigma_d=0$



(b) 噪声因子  $\sigma_d=0.1$



(c) 噪声因子  $\sigma_d=0.2$

图 3 正则化参数变化时的误差分析

加,网络变得更加密集,连通性即平均邻居节点数量也随之增加。参考文献[9],实验中适当调整节点通信距离,使得平均连通性约等于 12,正则化参数  $\alpha$  和  $\beta$  分别为 500 和 0.5。对于不同传感器数量分别做 200 次蒙特卡罗仿真来验证算法效率。分别使用 Matlab 工具箱 SeDumi 和本文提出的 ADMM 算法求解式(6),所需 CPU 时间如图 4 所

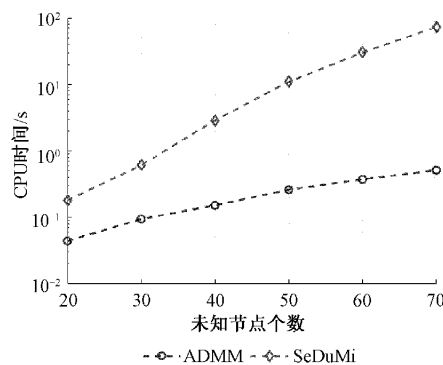


图 4 求解时间对比分析

示。从结果可以看出,SeDumi 求解(6)式的平均 CPU 时间随着节点数量的增加而快速增长,而 ADMM 算法的 CPU 时间要少得多。因此对大规模传感网而言,ADMM 算法更有优势。另一方面,对于小规模传感网,ADMM 算法也表现出比传统 SDP 求解器更高的计算效率。

## 4 结 论

本文提出了一种基于 EDM 及其 Gram 矩阵的传感器网络定位算法。为了获得更准确的定位结果,首先利用 Gram 矩阵的低秩特征来精确建模定位问题,并进一步引入正则化项以避免虚假解,然后引入 ADMM 求解方法,使该算法可以更快地求解。仿真结果表明,该算法相比于传统的 MDS 算法定位精度更高。与其他基于 EDM 的方法相比,当测量距离被不同量级噪声干扰时,本文算法具有更好的鲁棒性。

## 参考文献

- [1] KANDRIS D, NAKAS C, VOMVAS D, et al. Applications of wireless sensor networks: an up-to-date survey[J]. Applied System Innovation, 2020, 3(1): 14.
- [2] 刘雨,肖本贤,尹柏强. 基于修正 RSSI 值的四边形加权质心定位算法[J]. 电子测量与仪器学报, 2020, 34(10): 107-114.
- [3] 褚银菲,吕惠芳. 基于测距修正的差分进化的 DV-Hop 定位算法[J]. 国外电子测量技术, 2021, 40(6): 33-37.
- [4] PAUL A K, SATO T. Localization in wireless sensor networks: A survey on algorithms, measurement techniques, applications and challenges[J]. Journal of Sensor and Actuator Networks, 2017, 6(4): 24.
- [5] KHAN F, NGUANG S K. Distributed localization algorithm for wireless sensor networks using range lookup and subregion stitching [J]. IET Wireless Sensor Systems, 2021, 11(5): 179-205.
- [6] 张贺娜,乐燕芬,施伟斌. 基于特征降维的核岭回归室内定位算法[J]. 仪器仪表学报, 2020, 41(10): 83-91.
- [7] 黄东华,赵勇胜,赵拥军,等. 基于 DOA-TDOA-FDOA 的单站无源相干定位代数解[J]. 电子与信息学报, 2021, 43(3): 735-744.
- [8] SHANG Y, RUMMLER W, ZHANG Y, et al. Localization from connectivity in sensor networks[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2004, 15(11): 961-974.
- [9] BISWAS P, LIAN T C, WANG T C, et al. Semidefinite programming based algorithms for sensor network localization[J]. ACM Transactions on Sensor Networks(TOSN), 2006, 2(2): 188-220.
- [10] WANG Z, ZHENG S, YE Y, et al. Further relaxations of the semidefinite programming approach to sensor network localization[J]. SIAM Journal on Optimization, 2008, 19(2): 655-673.
- [11] KUMAR S, DIXIT R, HEGDE R M. Second order cone programming based localization method for Internet of Things [C]. 2017 4th International Conference on Control, Decision and Information Technologies(CoDIT), IEEE, 2017: 1078-1083.
- [12] XIAO F, SHA C, CHEN L, et al. Noise-tolerant localization from incomplete range measurements for wireless sensor networks [C]. INFOCOM, IEEE, 2015: 2794-2802.
- [13] BHASKAR S A. Localization from connectivity: A 1-bit maximum likelihood approach [J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2016, 24 (5): 2939-2953.
- [14] GUO X, CHU L, SUN X. Accurate localization of multiple sources using semidefinite programming based on incomplete range matrix[J]. IEEE Sensors Journal, 2016, 16(13): 5319-5324.
- [15] ZHU Y, JIANG A, KWAN H K. Localization of sensor networks via low rank approximation[C]. 2016 IEEE International Conference on Digital Signal Processing, IEEE, 2016: 305-308.
- [16] XIAO F, CHEN L, SHA C, et al. Noise tolerant localization for sensor networks [J]. IEEE/ACM Transactions on Networking, 2018, 26 (4): 1701-1714.
- [17] OGUZ-EKIM P, GOMES J P, XAVIER J, et al. Robust localization of nodes and time-recursive tracking in sensor networks using noisy range measurements [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2011, 59(8): 3930-3942.
- [18] ZHOU S, XIU N, QI H D. A fast matrix majorization-projection method for penalized stress minimization with box constraints [J]. IEEE Transactions on Signal Processing, 2018, 66 (16): 4331-4346.
- [19] BOYD S, PARIKH N, CHU E, et al. Distributed optimization and statistical learning via the alternating direction method of multipliers[J]. Foundations and Trends<sup>®</sup> in Machine Learning, 2011, 3(1): 1-122.
- [20] 程杰,董云玲,陈嘉兴,等. 一种具有连续跳数值的三维 DV-Hop 改进算法[J]. 电子学报, 2020, 48(11): 2122-2130.

## 作者简介

诸一琦(通信作者),讲师,主要研究方向为无线传感器网络、无线通信。

E-mail:zhuyiq@jsut.edu.cn

诸燕平,博士,副教授,主要研究方向为无线传感器网络、多媒体信号处理。

E-mail:zhuyanping@cczu.edu.cn