

机械振动信号压缩采集重构算法性能研究^{*}

郭俊锋 严栋山 雷春丽 魏兴春

(兰州理工大学机电工程学院 兰州 730050)

摘要: 对机械振动信号进行压缩采集能够突破奈斯特采样定理的限制,把对信号的采样变成对信息的采样,有效地解决传统采样方式产生大量数据的问题且不造成信息的损失。振动信号重构算法是这一技术中非常关键的一部分,直接影响着振动信号的重构精度。然而目前的一些典型重构算法都是普适性的,有必要对机械振动信号的恢复效果做一系统研究。对当前比较典型的4种重构算法OMP(orthogonal matching pursuit)、StOMP(stagewise orthogonal matching pursuit)、BP(basis pursuit)、GP(gradient projection)针对机械振动信号的重建进行了适应性分析,主要从重建精度和重建时间两个方面进行系统研究并进行仿真实验。仿真实验表明,OMP算法复杂度低但不适于机械振动信号的恢复;StOMP有着较快的运算速度,非常适合于求解大尺度问题;BP复杂程度高,求解速度较慢,但重构精度很高;GP具有非常快的运算速度,但重构精度较差;

关键词: 振动信号;压缩感知;重构算法;OMP;StOMP;BP;GP

中图分类号: TH17; TN98 **文献标识码:** A **国家标准学科分类代码:** 510.4010

Study on the performance of reconstruction algorithm of compression acquisition for the mechanical vibration signals

Guo Junfeng Yan Dongshan Lei Chunli Wei Xingchun

(School of Mechanical and Electronic Engineering, Lanzhou University of Technology, Lanzhou 730050, China)

Abstract: The compression acquisition of mechanical vibration signals can break through the limitation of Shannon-Nyquist sampling theorem, this method will turn sampling of the signal into the sampling of the information, which effectively solve the problem of traditional sampling methods to generate huge amounts of data as well as does not cause the loss of information. Reconstruction algorithm for vibration signal is a very important part of this technology, it directly affect the reconstruction accuracy of the vibration signal. However, some present typical reconstruction algorithms are universal, it is necessary to do a systematic research on the recovery effect of the mechanical vibration signal. The adaptability analysis of four typical reconstruction algorithm orthogonal matching pursuit (OMP), stagewise orthogonal matching pursuit(StOMP), basis pursuit(BP), gradient projection(GP) is systematically carried out for the reconstruction of the mechanical vibration signal, mainly in two aspects of the reconstruction precision and the reconstruction time. Simulation experiments show that OMP algorithm has low complexity but it is not suitable for the recovery of mechanical vibration signal; StOMP has a faster computing speed and is very suitable for solving large scale problems; Complexity of BP is high, solving speed is slow, but the reconstruction precision is very high; GP has very fast computing speed, but the reconstruction accuracy is poor.

Keywords: vibration signal; compressive sensing; reconstruction algorithm; OMP; StOMP; BP; GP

0 引言

随着现代化工业和科学技术的快速发展,机械设备日趋大型化、高速化、集成化、自动化和智能化。一旦设备的某个部分在运转过程中出现故障,将造成巨大的经济损失

和人员伤亡。因此,各国都越来越关注机械设备的状态监测和故障诊断技术。在机械设备故障诊断技术中,振动监测技术是普遍采用的基本方法。传统的且目前被广泛采用的振动信号检测与采样是以奈奎斯特采样定理为基础的A/D采样。它指出信号的采样率不低于最高频率的2倍,

信号才能被精确重构。然而,随着大型机械设备的振动频率越来越高,带宽越来越宽。如果依然用传统采样定理采样信号,必然产生海量的监测数据,这些数据的实时传输与同步存储已成为亟待解决的工程技术瓶颈问题。传统的解决方法是对振动信号进行采样,然后再压缩以减少传输数据,在这一过程中丢弃了大量的数据。这些数据对监测振动信号是不重要的或有些是冗余的,而且这一过程是一种严重的资源浪费,如果能够直接采样压缩后的数据,将可以大大减少振动信号数据量且不造成信息损失。

近年来兴起的压缩感知理论^[1-2](compressive sensing)对解决这一问题起到了启发作用。该理论表明如果信号在某个变换域是稀疏的或是可压缩的,那么可以用与稀疏基非相干的测量矩阵对信号进行观测,获得原始信号的少量非自适应线性测量值,然后由这些测量值用相应的重构算法精确重构出原始信号。理论证明,这些少量的测量值包含了精确重构出原始信号的足够信息。基于这一观点,如果振动信号满足这一前提,则采集振动信号时,能够在保证不丢失信息的前提下以远低于奈奎斯特频率对振动信号进行采样。

一旦在稀疏前提下获得振动信号的压缩测量,则重构算法性能的好坏直接影响着压缩采集振动信号能否成功实现,进而影响到压缩采集在工程实际中的应用。本文结合机械振动信号自身的结构信息,对当前比较典型的针对其他领域提出的四种算法,应用于机械振动信号恢复且进行了适应性分析,并对重构精度和速度作出定量评价,以期在工程实际中起到指导性的作用。

1 振动信号压缩采集方法

在文献[3]中提出了机械振动信号的压缩采集框架,如图1所示。在机械振动信号满足稀疏性的前提下,在机械装备现场对振动信号进行全局非自适应测量而得到包含装备完整信息的少量测量值,然后要么把这些测量值存储起来,要么直接传输到振动信号处理中心,然后对其进行重构,恢复出原始振动信号,再进行后期处理。

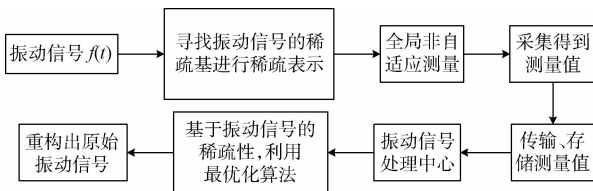


图1 基于稀疏性的振动信号采集压缩原理

由以上框架知,振动信号的压缩采集主要分为3个方面:振动信号的稀疏性表示、测量矩阵和重构。振动信号的稀疏表示就是将振动信号投影到某个正交变换基时,变换系数中如果只含有 K 个非零元素属于精确稀疏的情况。一般实际的振动信号都不满足精确稀疏的要求,但如果这

些变换系数按一定量级呈现指数衰减,具有非常少的大系数和很多的小系数,可以认为是近似稀疏的信号,即可压缩信号。任意振动信号可以表示为:

$$f = \Psi x \quad (1)$$

式中: f 是长度为 N 的一维离散振动信号, Ψ 为 $N \times N$ 的正交基, x 是 $N \times 1$ 的投影系数。一般振动信号中包含了多种余弦信号和冲击衰减信号,其频谱相对于时域原始振动信号是理想的近似稀疏信号,如图2所示。测量矩阵直接负责对振动信号的压缩测量,在得到振动信号最稀疏表示的前提下,只要保证测量矩阵与分解基最大不相干,则能得到振动信号尽可能少的且含有完整信息的振动测量值。振动信号重构是由测量值到原始信号的一个转换过程,这一过程要利用重构算法来实现,算法适应性能的好坏直接影响了压缩测量的成败。

2 振动信号重构算法性能研究

为了能够实现压缩测量,通常测量值的维数 M 要小于信号长度 $N(M \ll N)$ 。这造成信号重构实质是在求解一个欠定方程组,一般情况下欠定方程组有无穷多个解。但是,如果信号是稀疏的或是可压缩的,同时测量矩阵满足约束等距条件(RIP),就使得欠定问题可解且解是唯一的,能够精确地恢复信号。Candès^[2]证明了信号重构问题可以通过求解最小 l_0 范数问题加以解决。但由于 l_0 范数的高度非凸性,最小 l_0 范数问题是个需要组合搜索的NP-hard问题,在一定时间内无法求解。因此,学者们提出了多种近似等价的信号重构算法。目前经常被采用的重构算法主要分为3类^[4]:凸松弛算法、贪婪追踪算法、组合算法。

第1类凸松弛算法,最典型的是基于最小 l_1 范数。这类方法通过将非凸问题转化为凸问题求解找到信号的逼近,如BP^[5]、GP算法^[6-7]、迭代阈值算法^[8-9]等。BP实质上是一个优化准则,并不是一个具体的算法^[5]。其数学优化模型为: $\min \|x\|_1$ s. t. $Ax = b$,是在满足约束条件的所有解中找到一个其 l_1 范数最小的解。式中 A 为感知矩阵, b 为测量值, x 为原始信号的稀疏性表示。以上优化问题又可以转换为一个标准的线性规划问题加以求解: $\min cx$ s. t. $Ax = b, x \geq 0$ 。求解线性规划问题有很多算法,如单纯形算法,内点法等。文献[5]提出可以利用一种叫做原始对偶内点法的算法(a primal-dual logarithmic barrier method)高效求解。BP精确重构的理论保证强,文献[2]指明,一旦测量矩阵满足RIP条件,就能准确地恢复所有的稀疏信号。而且所需的测量个数较少,在测量矩阵为高斯随机矩阵时,需要 $O(K \log(N/K))$ 个测量数就能精确重构。另外BP能够稳定地处理观测值还有一定噪声时的信号重构问题和超分辨问题。但BP主要的缺点是计算复杂度相对较高,运算速度慢。BP和GP本质上都是在求解一个欠定方程组的稀疏解问题,只不过所用的数学优化模型有差别。GP所用的数学优化模型为

$\min_x 1/2 \|y - Ax\|_2 + \tau \|x\|_1$, 其中 τ 是一个非负的正则化参数。文献[6]介绍了两种 GP 算法, GPSR-Basic 和 GPSR-BB, GPSR-BB 比 GPSR-Basic 所需的迭代次数少, 这两种算法的主要区别在于每次迭代的下降方向和步长不一样。而且在求出近似解之后, 可以应用 Debiasing 步骤, 以进一步提高解的精度。通常, τ 值越小 GP 算法的速度越慢。有效的做法是算法初始取一个较大的 τ 值, 然后运用 Warm Starting and Continuation 步骤, 经过几次迭代逐步地逼近理想的 τ 值, 这样可以提高算法的收敛速度。GP 运算速度非常快, 但重构精度较差。

第 2 类贪婪追踪算法, 这类方法是通过每次迭代时选择一个局部最优解来逐步逼近原始信号。包括 OMP 算法^[10-11], StOMP 算法^[12-13] 和 ROMP 算法^[14-15] 等。OMP 算法其基本思想是顺序地发现未知信号的支集。每一次迭代的过程中, 在测量矩阵中选择与信号相关性最大(内积最大)的一个原子来构建稀疏逼近, 并求出信号残差, 然后继续选择与信号残差相关性最大的原子, 经过一定次数的迭代, 信号可以由一些原子表示。根据最小二乘法原理 OMP 能够保证每次迭代后的信号残差与已经选择的每个原子是正交的, 所以比 MP 算法提高了收敛速度。文献[10]表明, 一个稀疏度为 K 的 N 维离散时间信号, 测量矩阵为随机高斯矩阵, 在测量值 $M \geq O(K \ln N)$ 时, 能以较高的概率准确重构信号。但 OMP 求解得到的只是局部最优解并不是全局最优解, 精确重构的理论保证比 BP 算法弱, 并非对所有信号都能准确重构。而且所需的测量值数量比 BP 多, 对测量矩阵的要求也比 RIP 更加严格^[10], 并且当测量值包含噪声时, OMP 能否准确恢复信号还不明确。StOMP 算法也是一种贪婪算法, 但和 OMP 算法不同的是, OMP 每次迭代只选择原子矩阵(测量矩阵)的一个原子。而 StOMP 通过设置一个适当的硬阈值, 只要信号与原子的相关性大于这个阈值都可以选择, 所以 StOMP 每次迭代能够选择很多个原子, 比 OMP 降低了计算复杂度, 提高了运算速度。文献[12]介绍了两种阈值选择方案—FAR 和 FDR。一般情况下, FAR 比 FDR 重构精度高, 但运算速度比 FDR 慢。另外 OMP 算法为了减少最小二乘法的计算负担, 需要利用 Cholesky 分解并且储存 Cholesky 分解的系数。当处理的信号长度太大时, OMP 算法的这一缺点阻碍了其在实际中的应用, 而 StOMP 仅有适当的存储量, 非常适合于求解大尺度信号问题。ROMP 每次迭代选择 K 个原子(K 为信号的稀疏度), 然后通过正则化步骤进一步缩减选择的原子集合。ROMP 提供了比 OMP 更全面的理论保证, 只要测量矩阵满足一定的 RIP 条件, 就能准确地恢复每个稀疏信号。

第 3 类组合算法, 这类方法要求信号的采样支持通过分组快速重建, 如傅里叶采样^[16]、链式追踪^[17] 等。这些算法运行速度很快, 但是需要高度结构化的测量矩阵。

综上所述, 每种算法都有其固有的优缺点。以上算法

都是普适性的或是相对其他领域提出的, 针对机械振动信号的恢复效果还不明确。本文深入分析了上述算法对机械振动信号的适应性。

3 重构算法的实验仿真及性能分析

本文选用美国西储大学的轴承数据进行实验验证。该试验对象为深沟球轴承, 轴承型号为 6025-2RS JEM SKF, 在轴承外圈 6 点钟方向设置单点故障, 故障直径为 0.007 in。轴承负载为 0, 信号采样频率为 12 000 Hz。

首先利用高斯随机测量矩阵对滚动轴承振动信号进行测量, 取信号长度 $N = 1\ 024$, 稀疏基采用傅里叶正交基。然后由得到的测量值利用上述 4 种重构算法分别进行信号恢复, 并比较重构误差和运行时间。这一线性测量的过程如下所示:

$$y = \Phi f = \Phi \Psi x = \Phi' x \quad (2)$$

式中: f 为原始振动信号, Φ 为 $M \times N$ 的测量矩阵, Ψ 为稀疏基, x 为信号 f 在 Ψ 变换域的稀疏表示。 $\Phi' = \Phi \Psi$ 为 $M \times N$ 的感知矩阵。

信号重构的过程可以表示为:

$$\min_x \|x\|_1 \text{ s. t. } \Phi' x = y \quad (3)$$

要保证精确重构 x , Φ' 必须满足约束等距条件^[18]。由于 Ψ 是固定的, 要使得 Φ' 满足约束等距性, 测量矩阵 Φ 就必须满足一定的条件。理论证明, 和约束等距性等价的条件是测量矩阵和稀疏基不相干。高斯随机矩阵、伯努利矩阵、部分傅里叶矩阵等和大多数的稀疏基都不相干, 使得感知矩阵 Φ' 能以较大的概率满足约束等距性。所以通常测量矩阵都具有随机的性质。

本文选用的 OMP、StOMP 和 BP 算法程序来自斯坦福大学的工具箱 (<http://sparselab.stanford.edu/>), GP 算法程序来自 (<http://www.lx.it.pt/~mtf/GPSR/>), 采用相对误差 Rel_Err (Relative Error) 作为恢复振动信号的评价指标, 其中 Rel_Err 的定义为:

$$Rel - Err = \|x - x'\|_2 / \|x\|_2 \quad (4)$$

式中: x 为原始信号, 如图 2(a) 所示, x' 为恢复信号。图 2(b) 表示了滚动轴承振动信号在离散傅里叶变换(DFT)域的系数, 图 2(c) 是把 DFT 系数的绝对值按从大到小排列, 可以看出这些系数按幂次速度衰减。以上分析表明, 滚动轴承振动信号是可压缩信号, 而且在傅里叶基下的稀疏度不是非常高, 幅值 $|f(\omega)| \geq 4.6201 \times 10^{-4}$ 的系数约有 304 个, 含有较多的大系数。图 3 和图 4 分别表示了 4 种重构算法相对测量值数量变化(102~918)的平均相对误差和平均运行时间。对每个测量值数量 M 产生 50 个随机的数据然后取其平均值。

如图 3 所示, 在测量值 $M=714$ 时, BP 在 4 种算法中重构误差最小为 0.143 9, GP 重构误差最大为 0.361 7。表 1 列出了 4 种算法相对测量值数量变化的重构误差。由于 BP 是基于最小范数的, 这一范数可以提升信号的稀疏度,

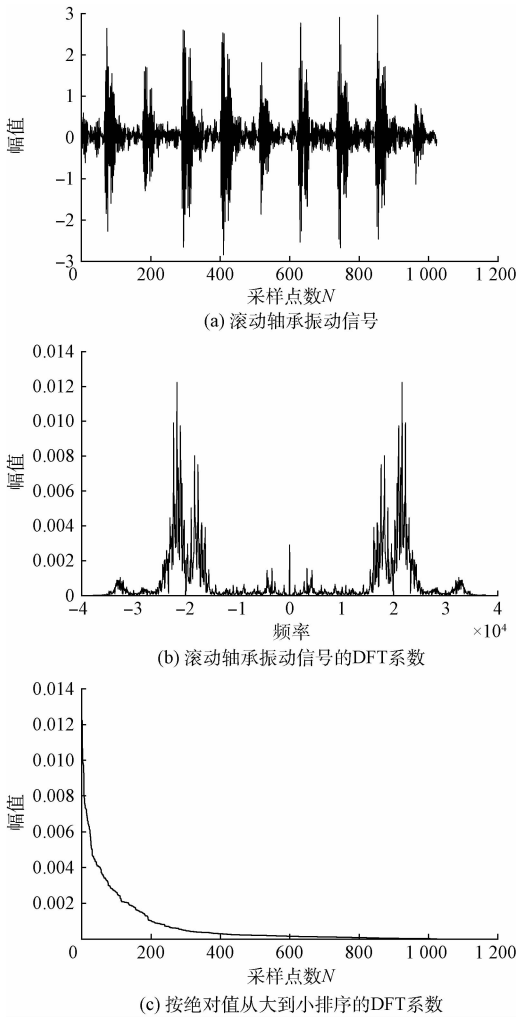


图2 滚动轴承振动信号的原始波形及其傅里叶系数

因此能够精确地恢复可压缩信号。OMP、StOMP 每次迭代时依据信号与测量矩阵每列之间的相关程度,选择一个或数个原子,但缺乏后续的方法来验证已经选择的原

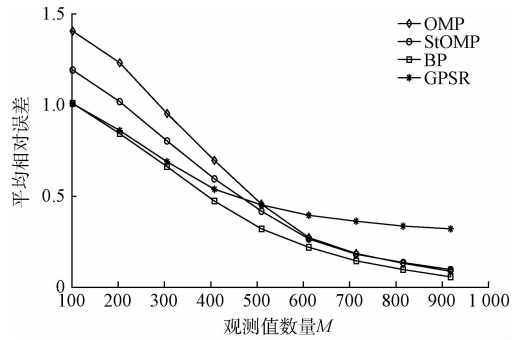


图3 4种重构算法的重构误差相对压缩测量数目的变化

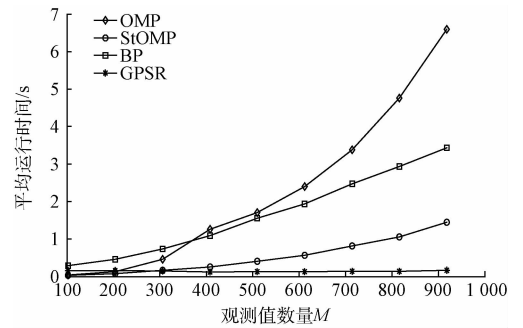


图4 4种重构算法的运行时间相对压缩测量数目的变化

子是否可信,因此重构误差比BP大,并且在相同的重构误差下BP所需的测量值数量最少。这一点验证了文献[2]中的理论,测量矩阵为高斯随机矩阵,在测量值 $M \geq O(K \ln(N/K))$ 时BP能以较高的概率精确重构原始信号。OMP、StOMP在测量值数量较少时,重构误差很大,但在测量值 $M \geq 714$ 时取得了较高的精度。总体来说,重构误差和信号在某个稀疏基下的稀疏程度、测量矩阵的选择、重构算法都有密切的关系。首先应选择合适的稀疏基,保证信号的稀疏度,然后根据重构算法选择合适的测量矩阵,这样才能保证信号的恢复精度。

表1 4种重构算法相对压缩测量数目变化的重构误差

测量值数目	102	204	306	408	510	612	714	816	918
OMP	1.406 0	1.231 1	0.954 2	0.695 1	0.454 6	0.272 3	0.185 0	0.130 1	0.087 0
StOMP	1.192 2	1.017 5	0.802 6	0.593 7	0.416 1	0.265 0	0.179 6	0.133 8	0.097 2
BP(原对偶内点法)	1.009 5	0.843 5	0.661 3	0.471 8	0.319 9	0.218 7	0.143 9	0.096 2	0.055 5
GP	1.007 5	0.859 1	0.688 5	0.538 1	0.451 1	0.394 4	0.361 7	0.335 3	0.320 6

如图4所示,GP有着非常快的运算速度,随着测量值数量的增长,运行时间都没有较大的增加。表2列出了4种算法在取得相同的重构误差时所用的时间。OMP随着测量值数量增长运行时间增加较大。这是由于,OMP非常适合恢复具有较高稀疏度的信号,而滚动轴承振动信号是一个近似稀疏或可压缩的信号。当信号不是非常稀疏

时,OMP精确恢复信号需要很多的迭代次数,每次迭代都要求解一个最小二乘问题,总的计算量中对最小二乘法求解占了很大一部分,因此运行时间增加较大。而StOMP通过设置阈值,每次迭代可以选择很多个原子,减少计算最小二乘法的次数,减轻了计算负担提高了运算速度。表3列出了4种算法的计算复杂度。可以看出OMP、BP具

有三次阶复杂度,所以运行速度较慢, StOMP、GP 具有二次阶复杂度,运行速度较快。并且 OMP 的计算复杂度相对测量值 n 的增长成三次方的关系,因此在测量值数量较大时运行时间甚至超过了 BP。

表2 算法在达到相同重构误差时所用的时间

误差算法	0.451 1	0.320 6
OMP	1.709 5	2.056 5
StOMP	0.402 2	0.484 9
BP(原对偶内点法)	1.090 1	1.558 1
GP	0.127 6	0.163 8

表3 4种算法最坏情况下的计算复杂度

算法	复杂度
OMP	$4n^3/3 + n^2N + O(N)$
StOMP	$120nN + O(N)$
BP(原对偶内点法)	$10(2N)^3/3 + O(nN)$
GP	$2N + O(N) + O(nN)$

注: n 表示测量值数量, N 表示信号长度

4 结 论

本文主要对机械振动信号压缩采集时的重构算法进行了研究,对当前4种典型重构算法应用于振动信号重构时的性能进行了分析。经过仿真实验表明,OMP算法简单且易于编程实现,非常适合恢复稀疏度较高的信号。在信号具有较高的稀疏度时可以取得较快的速度和较高的精度。StOMP可以看作是OMP的一种改进算法,通过减少计算最小二乘法的次数提高了运算速度,具有较低的复杂度

和较高的重构精度,适合大尺度问题的求解。BP复杂程度高、求解较慢,但重构误差小,精确重构的理论保证强,只要测量矩阵满足RIP条件就能精确恢复所有的稀疏信号。GP算法虽然运行速度非常快,但重构误差较大,不适合实际应用。综上所述,StOMP算法有着较快的运算速度,重构误差虽然比BP大,但在允许的范围之内,非常适合振动信号的恢复。

参考文献

- [1] DONOHO D L. Compressed sensing [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 52(4): 1289-1306.
- [2] CANDÈS E L. Compressive sampling [C]. Proceedings of the International Congress of Mathematicians, 2006: 1433-1452.
- [3] 郭俊锋, 施建旭, 雷春丽, 等. 一种滚动轴承振动信

号的数据压缩采集方法[J]. 振动与冲击, 2015, 34(23):8-13.

- [4] 石光明, 刘丹华, 高大化, 等. 压缩感知理论及其研究进展[J]. 电子学报, 2009, 37(5):1070-1081.
- [5] CHEN S, SAUNDERS M A, DONOHO D L. Atomic decomposition by basis pursuit [J]. Siam Review, 2006, 43(1):129-159.
- [6] FIGUEIREDO M A T, NOWAK R D, WRIGHT S J. Gradient projection for sparse reconstruction: Application to compressed sensing and other inverse problems [J]. IEEE Journal of Selected Topics in Signal Processing, 2008, 1(4):586-597.
- [7] 王强, 张培林, 王怀光, 等. 基于稀疏分解的振动信号数据压缩算法[J]. 仪器仪表学报, 2016, 37(11): 2497-2505.
- [8] HERRITY K K, GILBERT A C, TROPP J A. Sparse approximation via iterative thresholding [C]. IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing, 2006:III-III.
- [9] 赵新中, 陶永耀, 贺佩, 等. 一种基于小波邻域的半软阈值去噪算法[J]. 国外电子测量技术, 2016, 35(4):42-45.
- [10] TROPP J A, GILBERT A C. Signal recovery from random measurements via orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2008, 53(12):4655-4666.
- [11] 孙春雨, 徐娟, 韩江洪. 基于正交匹配与周期能量的滚动轴承故障诊断[J]. 电子测量与仪器学报, 2016, 30(3):423-430.
- [12] DONOHO D L, TSAIG Y, DRORI I, et al. Sparse solution of underdetermined linear equations by stagewise orthogonal matching pursuit [J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2006, 58(2): 1094-1121.
- [13] LIU Z, ZHAO B, XING F. Design and error analysis of a high accurate star simulator based on optical splicing technology [J]. Instrumentation, 2015, 2(1):44-56.
- [14] NEEDELL D, VERSHYNIN R. Uniform uncertainty principle and signal recovery via regularized orthogonal matching pursuit [J]. Foundations of Computational Mathematics, 2009, 9(3):317-334(18).
- [15] 孙斌, 赵凯恒. 基于能量分选的正则化匹配追踪改进算法[J]. 电子测量技术, 2016, 39(5):154-158.
- [16] GILBERT A C, STRAUSS M. Improved time bounds for near-optimal sparse Fourier representations [J]. SPIE, 2005: 398-412.

- [17] ILBERT A C G, STRAUSS M J, TROPP J A, et al. Algorithmic lineardimension reduction in the norm for sparse vectors [EB/OL]. <http://www.math.ucdavis.edu/~vershynin/papers/algorithmic-dim-reduction.pdf>
- [18] CANDLES E J, TAO T. Decoding by linear programming[J]. IEEE Transactions on Information Theory, 2005, 51(12):4203-4215.

作者简介

郭俊锋, 博士, 副教授, 研究方向为压缩感知、机械故障诊断。

E-mail:junf_guo@163.com

严栋山(通讯作者), 硕士研究生, 研究方向为压缩感知、机械故障诊断。

E-mail:15101322601@163.com