

DOI:10.19651/j.cnki.emt.2005451

# 基于有限元的二维各向异性地层中大地电磁响应

高晓萌

(长江大学 地球物理与石油资源学院 武汉 430100)

**摘要:** 地球介质的电各向异性现象是普遍存在的,而传统上电磁法的理论研究与实际应用多是基于各向同性理论的假设,因此研究基于各向异性理论下电磁场的响应特征就显得非常迫切。从 Maxwell 方程出发,推导了二维倾斜各向异性下大地电磁场的偏微分方程,并采用有限元法对设计的一系列二维各向异性模型进行数值计算。结果表明,不论改变各向异性系数还是改变倾角,均能引起视电阻率和相位曲线的显著变化;由于倾角的影响,导致了视电阻率曲线在空间上的不对称。研究结果为大地电磁资料的处理和解释提供理论基础和技术指导。

**关键词:** 大地电磁;电性各向异性;有限元;正演

中图分类号: P319 文献标识码: A 国家标准学科分类代码: 170.2045

## Magnetotelluric response of 2D anisotropic stratum based on finite element method

Gao Xiaomeng

(College of Geophysics and Petroleum Resources, Yangtze University, Wuhan 430100, China)

**Abstract:** The electrical anisotropy of the earth is universal, and the theoretical research and practical application of electromagnetic method are mostly based on the assumption of isotropic theory. Therefore, it is very necessary to study the response characteristics of electromagnetic field based on anisotropic theory. Starting from Maxwell's equation, this paper derives the partial differential equations of the magnetotelluric field under two-dimensional tilt anisotropy, and uses the finite element method to perform numerical calculations on a series of designed two-dimensional anisotropy models. The results show that whether changing the anisotropy coefficient or changing the dip angle can cause significant changes in the apparent resistivity and phase curves. And due to the influence of dip angle, the apparent resistivity curves are asymmetric in space. The results provide theoretical basis and technical guidance for the processing and interpretation of magnetotelluric data.

**Keywords:** magnetotelluric; electrical anisotropy; finite element method; forward modeling

## 0 引言

大地电磁测深法(MT)经过几十年的发展,已成为地球深部构造研究和资源勘探中必不可少的技术手段<sup>[1-2]</sup>。地球介质中的电性各向异性现象已被研究证实<sup>[3]</sup>,而传统的大地电磁法多是基于电性各向同性理论的假设。因此,为了提高 MT 的勘探精度与应用效果,有必要开展对各向异性地层中 MT 响应的深入研究。

真实的地球介质模型总是复杂多样的,随着勘探要求和勘探目标复杂度的不断提高,在模型设计方面,逐渐考虑到了更加符合地球介质真实情况的地电模型。在 MT 各向异性研究领域,1D 正演技术已趋于成熟,反演方法的研究

也不断地推进<sup>[4-5]</sup>。2/3D 地电模型的正演,通常只能由数值方法近似求解,常见的数值计算方法主要为有限差分法<sup>[6]</sup>和有限元法<sup>[7-9]</sup>等,有限差分法理论简单且易于实现,被一些学者用于对各向异性地层中的大地电磁响应进行计算<sup>[2,10]</sup>。随着各种技术的发展,有限元法在数值模拟中的优势逐渐得到了体现,其被学者们用于研究 MT 在各向异性地层中的响应特征<sup>[11-19]</sup>。

尽管学者们一直在不断地探索与研究各向异性情形下 MT 的响应特征及其数值计算,然而基于电性各向异性的大地电磁法还远没有走到实用化的程度。因此,本文采用有限元法计算了二维各向异性地层中 MT 的电磁场响应。通过对不同各向异性系数和不同倾角情形的计算,详细研

收稿日期:2020-11-28

究了各向异性因素对 MT 响应的影响。这对于深化各向异性情况下 MT 的研究和认识,提高大地电磁法的勘探效果和应用水平具有重要的指导意义。

### 1 理 论

在直角坐标系中,二维模型的走向平行于  $x$  轴。各向异性介质的张量电导率可由一个主电导率张量经过三重欧拉旋转得到,本文研究的各向异性参数设置为,3 个主电导率的关系式为  $\sigma_x = \sigma_\beta = \sigma_\gamma$  (电性主轴坐标系  $\alpha\beta\gamma$  与测量坐标系  $xyz$  对应) 以及绕  $x$  (或  $\alpha$ ) 轴的旋转角  $\varphi$ 。

张量电导率表示为:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \quad (1)$$

在准静态下频率域 Maxwell 方程组为 (取负时谐  $e^{-i\omega t}$ ):

$$\begin{cases} \nabla \times E = i\omega\mu H \\ \nabla \times H = \sigma E \\ \nabla \cdot D = 0 \\ \nabla \cdot B = 0 \end{cases} \quad (2)$$

式中:  $E$ 、 $D$ 、 $H$  和  $B$  分别为电场强度、电位移矢量、磁场强度和磁感应强度;  $\sigma$  为电导率张量; 磁导率  $\mu$  取真空中的值。

通过式(1)和(2),得到了如下形式的方程:

$$\frac{1}{i\omega\mu} \nabla^2 E_x + \sigma_{11} E_x = 0 \quad (3)$$

$$\frac{1}{M} \nabla \cdot (\tau \nabla H_x) + i\omega\mu H_x = 0 \quad (4)$$

式中:  $\sigma_{ij} (i, j = 1, 2, 3)$  为张量电导率中的元素;  $M = \sigma_{22}\sigma_{33} - \sigma_{23}^2$ ;  $\nabla = (\partial/\partial y, \partial/\partial z)$ ;  $\tau = \begin{pmatrix} \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{pmatrix}$ 。

从式(3)和(4)中容易看出,在倾斜各向异性条件下只有 TE 模式(式(4))与各向异性有关,而 TM 模式(式(3))与各向异性无关。因此,下面只对 TE 模式的情形进行讨论。

TE 模式的边值问题为(内边界条件为自然边界条件,在有限元计算中无需考虑):

$$\begin{cases} \frac{1}{M} \nabla \cdot (\tau \nabla H_x) + i\omega\mu H_x = 0 \\ H_x |_{\text{上边界}} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial n} |_{\text{侧边界}} = 0 \\ \frac{\partial H_x}{\partial n} + \sqrt{-i\omega\mu\sigma_\beta} H_x |_{\text{下边界}} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

通过变分原理将式(5)满足的泛定方程,转换为等价的弱解形式的有限元计算方程:

$$\begin{cases} F(H_x) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} \left[ \frac{1}{M} \left( \sigma_{22} \left( \frac{\partial H_x}{\partial y} \right)^2 + \sigma_{33} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} \right)^2 + \sigma_{23} \left( \frac{\partial H_x}{\partial z} \frac{\partial H_x}{\partial y} + \frac{\partial H_x}{\partial y} \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) \right) - i\omega\mu H_x^2 \right] + \\ \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \frac{\sqrt{-i\omega\mu\sigma_\beta}}{\sigma_\beta} H_x^2 dl \\ H_x |_{\text{上边界}} = 1 \\ \delta F(H_x) = 0 \end{cases} \quad (6)$$

对式(6)进行单元分析,即可得到如下的线性方程组:

$$Kx = b \quad (7)$$

式中:  $K$  为大型稀疏复矩阵;  $b$  为右端项;  $x$  为节点处的待求函数值向量。本文采用不完全 Cholesky 分解-QMR 技术对式(7)进行求解。

最后通过求取的电磁场分量,利用如下公式计算出视电阻率和阻抗相位值。

$$\rho = \frac{1}{\omega\mu} \left| \frac{E_y}{H_x} \right|^2 \quad (8)$$

$$\varphi = \arctan \frac{\text{Im}(E_y/H_x)}{\text{Re}(E_y/H_x)} \quad (9)$$

### 2 模型计算及分析

为验证程序的准确性,设计了如表 1 中参数所示的三层介质模型。本文算法的计算结果与 Pek 的 1D 各向异性程序计算结果的对比,如图 1 所示。由图 1 可知,大地电磁响应基本重合,检验结果证明了本文算法的可靠性。

表 1 三层层状介质的模型参数

地层	$\rho_\alpha / (\Omega \cdot m)$	$\rho_\beta / (\Omega \cdot m)$	$\rho_\gamma / (\Omega \cdot m)$	$\varphi / (^\circ)$	$h / km$
1	100	100	100	0	1
2	10	10	40	45	1
3	100	100	100	0	$\infty$

#### 2.1 相同各向异性系数、不同倾角的 2D 大地电磁响应

模型参数设置为,在  $100 \Omega \cdot m$  的均匀半空间中,有一个埋深为  $1\ 000\ m$ 、规模(按  $y, z$  坐标顺序)为  $700\ m \times 400\ m$  (如图 2 所示),且在地表投影的中心位于坐标原点的异常体。异常体处的电性参数如表 2 所示。通过对倾角不同取值情况的计算,来讨论倾角对大地电磁响应的影响。图 3 所示为相同各向异性系数不同倾角的视电阻率和相位曲线,同时与 M2 的计算结果进行了比较,图 3(a)和(b)为坐标原点处测点的结果,图 3(c)和(d)是频率为  $4.977\ Hz$  时的结果。

由图 3 可见,各向异性对大地电磁场的响应具有显著的影响。在视电阻率曲线中,图 3(a)的高频段基本重合,其值接近背景电阻率  $100 \Omega \cdot m$ ; 中、低频段内的视电阻率值

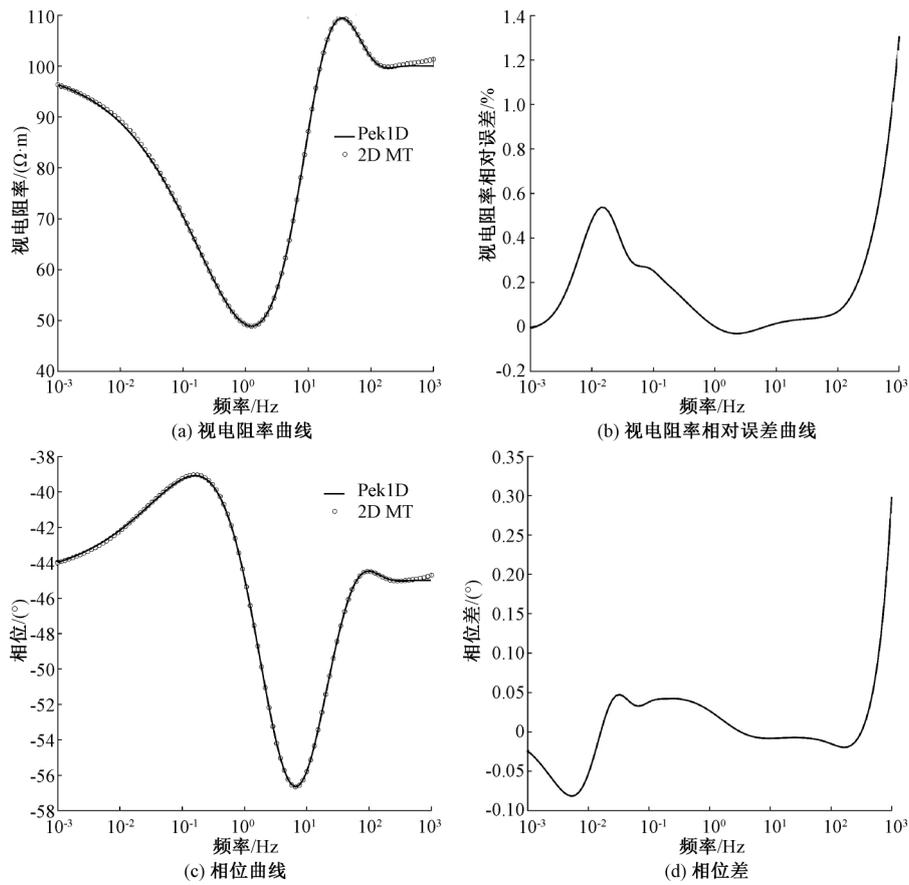


图 1 视电阻率和阻抗相位以及误差曲线

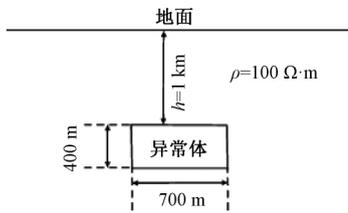


图 2 模型示意图

表 2 异常体处的电性参数

模型编号	$\rho_a/(\Omega \cdot m)$	$\rho_\beta/(\Omega \cdot m)$	$\rho_\gamma/(\Omega \cdot m)$	$\varphi/(\circ)$
M1	5	5	20	0/30/45/60/90
M2	10	10	10	0

随着倾角的增大而增大。图 3(c) 中在异常体的分布范围内随着倾角的增大视电阻率值也增大, 远离异常体处的曲线趋于重合。相位曲线也对各向异性表现明显, 随着倾角的增大, 相位在异常体处的计算频段内(图 3(b))或异常体的分布范围内(图 3(d))也增大, 其余部分的各条曲线趋于重合。等效各向同性的结果介于  $30^\circ$  与  $45^\circ$  角的计算结果之间。

## 2.2 相同旋转角、不同各向异性系数的 2D 大地电磁响应

模型设计如图 2 所示, 此处计算中仅改变二维异常体的电性参数(参数设置如表 3 所示), 其余参数保持不变。通过对不同各向异性系数的大地电磁场的计算, 来研究各向异性系数对大地电磁响应的影响。图 4 所示为相同倾角不同各向异性系数的视电阻率和相位曲线, 图 4(a) 和(b)为坐标原点处测点的结果, 图 4(c) 和(d)是频率为 4.977 Hz 时的结果。

表 3 异常体处的电性参数

模型编号	$\rho_a/(\Omega \cdot m)$	$\rho_\beta/(\Omega \cdot m)$	$\rho_\gamma/(\Omega \cdot m)$	$\varphi/(\circ)$
M3	5	5	5/10/15/20	45

从图 4 中可以看出各向异性的影响是较大的。随着各向异性系数的增大, 视电阻率值在中、低频段内(图 4(a))或异常体分布区(图 4(c))也增大, 在高频段(图 4(a))或远离异常体处(图 4(c))的视电阻率曲线基本重合或趋于重合。从相位曲线上看, 随着倾角的增大, 相位在异常体处的计算频段内(图 4(b))或异常体的分布范围内(图 4(d))也增大, 而其余部分的曲线基本重合或趋于重合。从以上的分析发现, 各向异性对大地电磁响应的影响是很明显的, 而

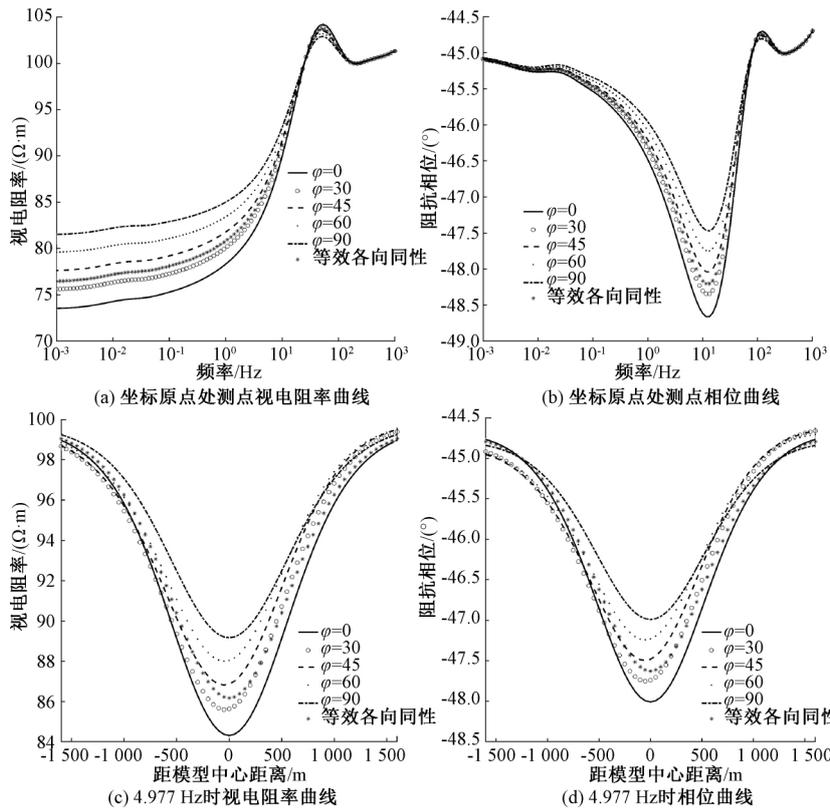


图 3 视电阻率和阻抗相位曲线

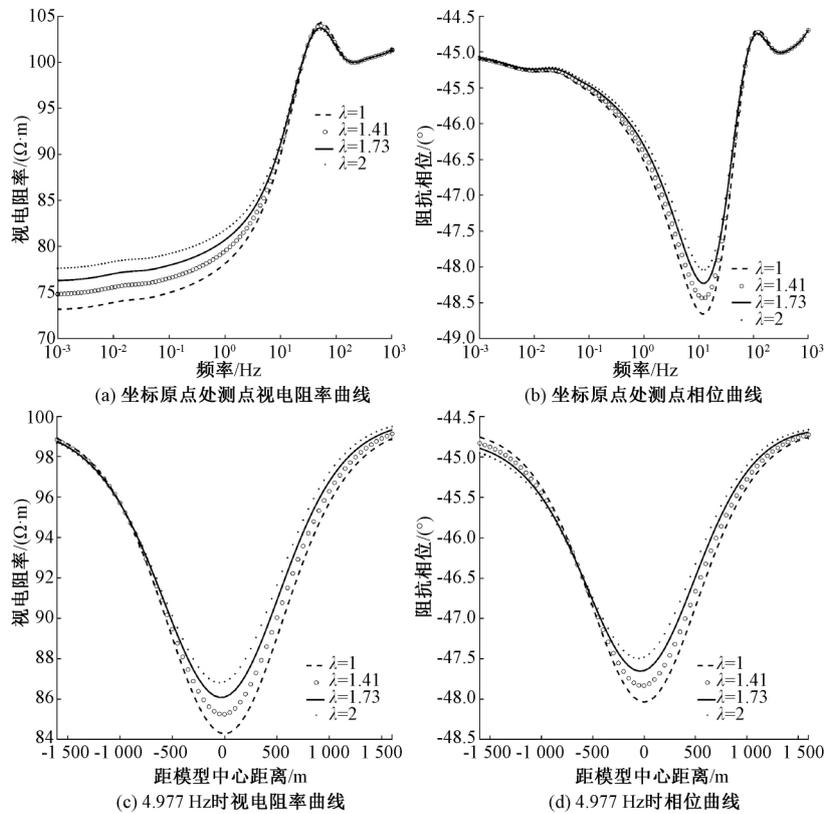


图 4 视电阻率和阻抗相位曲线

不能忽略。特别是在精细化处理和解释强各向异性地区的大地电磁资料时,必须考虑地下介质的各向异性现象,否则难以得到可靠的地质解释结果。

### 3 结 论

本文从 Maxwell 方程组出发,推导了二维倾斜各向异性下解耦的大地电磁 TE 模式的偏微分控制方程,利用 Galerkin 有限元法给出 TE 模式的有限元计算方程,并进行了数值实现。与 1D 各向异性计算结果的对比,验证了本文算法的正确性。在二维大地电磁各向异性理论的基础上,针对设计的一系列各向异性地电模型,探讨了各向异性系数和倾角对大地电磁场响应的影响。

二维各向异性地电模型的数值结果表明,视电阻率和阻抗相位均对各向异性的影响体现明显,且其值随各向异性系数和倾角的增大而增大;倾斜各向异性的结果介于倾角为  $0^\circ$  和  $90^\circ$  角的结果之间,同时由于倾角的影响,导致了视电阻率曲线在空间上的不对称;各向异性下的计算结果显著区别于各向同性的情形,说明了各向异性对 MT 的影响是不可忽略的。因此在实际的电磁法勘探中,为了提高勘探精度和成功率,应该考虑各向异性因素对电磁场分布的影响,特别是在强各向异性地区。今后非常有必要开展基于各向异性地电模型的大地电磁资料的处理、反演与解释方法研究。

### 参考文献

- [1] BECKEN M, RITTER O, BEDROSIAN P A, et al. Correlation between deep fluids, tremor and creep along the central San Andreas fault [J]. *Nature*, 2011, 480(7375):87-90.
- [2] 胡祥云,霍光谱,高锐,等. 大地电磁各向异性二维模拟及实例分析[J]. *地球物理学报*, 2013, 56(12):4268-4277.
- [3] 熊治涛,唐新功. 无限长源二维各向异性地层中 CSAMT 有限元模拟[J]. *地球物理学报*, 2017, 60(5): 1937-1945.
- [4] 秦林江,杨长福. 大地电磁全张量响应的一维各向异性反演[J]. *地球物理学报*, 2012, 55(2): 693-701.
- [5] 霍光谱,胡祥云,方慧,等. 层状各向异性介质大地电磁联合反演研究[J]. *物理学报*, 2012, 61(12): 605-614.
- [6] 黄钰,吴安坤,张淑霞,等. 地面建筑物(群)对地闪回击电磁环境的影响[J]. *国外电子测量技术*, 2018, 37(5):73-77.
- [7] 郭成成,姚磊,郑慧峰,等. 基于近场互谱法的医用聚焦超声场多参数检测[J]. *仪器仪表学报*, 2019, 40(3):39-46.
- [8] 汪茹,田瑾,吴飞,等. 一种基于有限元法的超高压输电线路三维电场计算方法[J]. *电子测量与仪器学报*, 2019, 33(2):103-110.
- [9] 刘肖肖,李鹏,陈以安. 基于电磁感应技术的弹道修正装定系统仿真分析[J]. *电子测量技术*, 2020, 43(17): 7-11.
- [10] 霍光谱,胡祥云,黄一凡,等. 带地形的大地电磁各向异性二维模拟及实例对比分析[J]. *地球物理学报*, 2015, 58(12):4696-4708.
- [11] KEY K, OVALL J. A parallel goal-oriented adaptive finite element method for 2.5-D electromagnetic modeling [J]. *Geophysical Journal International*, 2011, 186(1):137-154.
- [12] 熊彬,罗天涯,李长伟,等. 用有限单元法模拟各向异性介质中二维电性异常体的大地电磁响应[J]. *中山大学学报(自然科学版)*, 2013, 52(4):143-148.
- [13] 罗天涯,熊彬,李长伟,等. 各向异性介质中大地电磁场的异常特征[J]. *物探化探计算技术*, 2013, 35(6): 645-650.
- [14] 田红军,佟铁钢. 带地形的二维各向异性大地电磁测深数值模拟[J]. *工程地球物理学报*, 2015, 12(2): 139-144.
- [15] KEY K. MARE2DEM: A 2-D inversion code for controlled-source electromagnetic and magnetotelluric data [J]. *Geophysical Journal International*, 2016, 207(1):571-588.
- [16] 嵇艳鞠,黄廷哲,黄婉玉,等. 起伏地形下各向异性的 2D 大地电磁无网格法数值模拟[J]. *地球物理学报*, 2016, 59(12):4483-4493.
- [17] 黄一凡,胡祥云,韩波. 自适应有限元法的大地电磁二维各向异性正反演[J]. *石油地球物理勘探*, 2016, 51(4):809-820.
- [18] 曹晓月,殷长春,张博,等. 面向目标自适应有限元法的带地形三维大地电磁各向异性正演模拟[J]. *地球物理学报*, 2018, 61(6):2618-2628.
- [19] 熊治涛,唐新功,李丹丹. 二维电性各向异性极化体的频率域响应[J]. *石油物探*, 2020, 59(3):481-490.

### 作者简介

高晓萌,在读硕士研究生,主要研究方向为固体地球物理学。

E-mail:1760949645@qq.com